REZOLVAREA SUBIECTELOR PROPUSE LA PROBA DE MATEMATICĂ – E.c) – SPECIALIZAREA MATEMATICĂ-INFORMATICĂ LA EXAMENUL DE BACALAUREAT NAŢIONAL - SUBIECT DE REZERVĂ 26 AUGUST 2015

SUBIECTUL I

1. Rația unei progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ se definește ca diferență dintre oricare doi termeni care sunt consecutivi: $r = a_{n+1} - a_n, \forall n \in \mathrm{N}^*$.

Pentru $n = 1$ se obține $r = a_2 - a_1 = 2015 - 1 = 2014$.

2. Funcția $f : [1, 4] \to \mathbf{R}$ este strict crescătoare întrucât $f'(x) = 1 > 0, \ \forall x \in [1,4]$.

Valoarea maximă a unei funcții f strict crescătoare definită pe un interval închis $[u, v]$ se obține pentru valoarea maximă a domeniului ($f(v)$).

În cazul de față, avem $v = 4$ și $f(4) = 4 + 1 = 5$, prin urmare valoarea maximă a funcției este $y = 5$.

3. Se pune condiția de existență a logaritmului $x^2 - 8x > 0$, adică $x(x - 8) > 0$. Pentru inecuațiile de gradul al doilea, valorile pozitive se obțin în afara intervalului definit de soluțiile sale, așadar soluțiile ecuației inițiale trebuie să se găsească în intervalul $x \in (-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$.

Având în vedere că funcția logaritmică $f(x) = \log_a g(x)$ este bijectivă, orice egalitate de tipul $\log_a u(x) = \log_a v(x)$ este echivalentă cu $u(x) = v(x)$.

Aplicând această proprietate în cazul de mai sus, obținem:
$x^2 - 8x = 9$
$x^2 - 8x - 9 = 0$

Se rezolvă ecuația de gradul al doilea:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2}$$
$$= \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2} = 4 \pm 5$$

Se obține că:
$x_1 = 4 - 5 = -1$
$x_2 = 4 + 5 = 9$

Se observă că ambele soluții se găsesc în intervalul ce garantează existența logaritmului, ca atare mulțimea soluțiilor ecuației inițiale este S = { –1, 9 }.

4. Numărul de mulțimi ordonate de câte trei elemente distincte ale mulțimii A este dat de:

$$A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} = 24$$

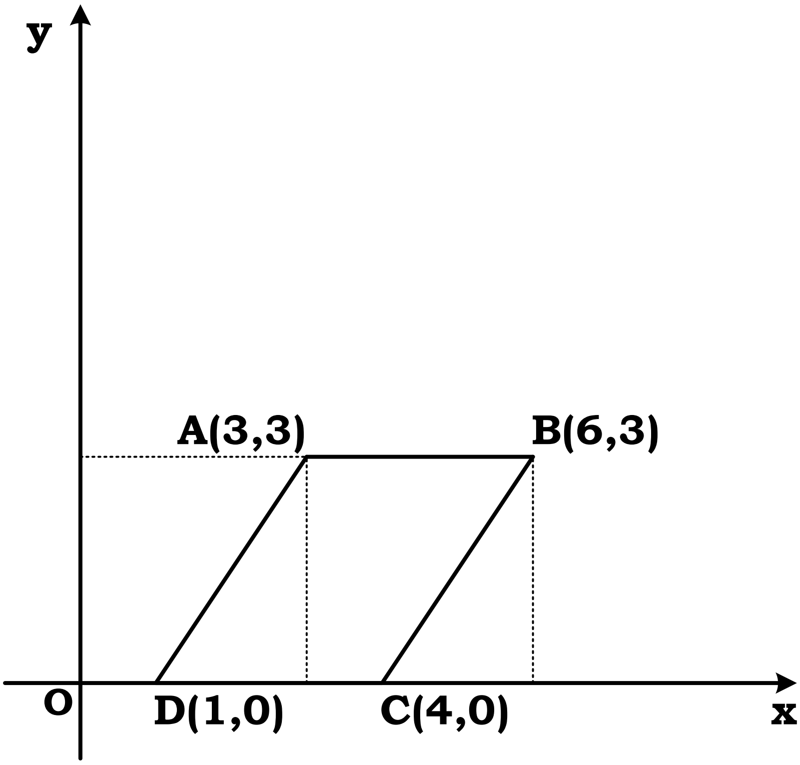
De altfel, se poate determina mulțimea *B* a numerelor formate din trei cifre distincte din mulțimea *A*, observându-se faptul că aceasta conține 24 de elemente:

B = { 123, 132, 213, 231, 312, 321, 124, 142, 214, 241, 412, 421, 134, 143, 314, 341, 413, 431, 234, 243, 324, 342, 423, 432 }.

5. Coordonatele punctului *D* se obțin astfel:

$x_D = x_C - (x_B - x_A) = 4 - (6 - 3) = 4 - 3 = 1$

$y_D = y_C - (y_B - y_A) = 0 - (3 - 3) = 0 - 0 = 0$



6. Se cunoaște faptul că suma unghiurilor într-un triunghi este π.

Se determină măsura unghiului A, ca diferență între suma tuturor unghiurilor din care se scade măsura unghiurilor B și C:

$$\hat{A} = \pi - \hat{B} - \hat{C} = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

Prin urmare, triunghiul ABC e dreptunghic, având catetele AB și AC și ipotenuza BC.

$$\sin C = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{BC}$$

de unde BC = 2.

SUBIECTUL al II-lea

1.

a) Se determină matricea *A*(1).

$$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+1 \\ 0 & 1 & 1+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Astfel, se poate calcula determinantul matricii $A(1)$:

$$det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 -$$
$$(0 \cdot 1 - 3 \cdot 0) + 2(0 \cdot 0 - 1 \cdot 0) = 1 - 0 - (0 - 0) + 2(0 - 0) = 1,$$
adică ceea ce trebuia demonstrat.

b) Se calculează expresia $A^2(a) - 2A(a) + I_3$, după care numărul real a se obține din egalarea elementelor de pe poziții similare:

$$A^2(a) - 2A(a) + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & a & a+1 \\ 0 & 1 & a+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & a+1 \\ 0 & 1 & a+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & a & a+1 \\ 0 & 1 & a+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} +$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + a \cdot 0 + (a+1) \cdot 0 & 1 \cdot a + a \cdot 1 + (a+1) \cdot 0 & 1 \cdot (a+1) + a \cdot (a+2) + (a+1) \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (a+2) \cdot 0 & 0 \cdot a + 1 \cdot 1 + (a+2) \cdot 0 & 0 \cdot (a+1) + 1 \cdot (a+2) + (a+2) \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot a + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot (a+1) + 0 \cdot (a+2) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} +$$
$$\begin{pmatrix} -2 & -2a & -2(a+1) \\ 0 & -2 & -2(a+2) \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1+0+0 & a+a+0 & a+1+a^2+2a+a+1 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+a+2+a+2 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2a & -2a-2 \\ 0 & -2 & -2a-4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} +$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2+4a+2 \\ 0 & 1 & 2a+4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2a & -2a-2 \\ 0 & -2 & -2a-4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1-2+1 & 2a-2a+0 & a^2+4a+2-2a-2+0 \\ 0+0+0 & 1-2+1 & 2a+4-2a-4+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 1-2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2+2a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se egalează expresia $A^2(a) - 2A(a) + I_3$ cu O_3 și se obține:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2+2a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prin egalarea termenilor aflați pe aceeași poziție, obținem:

$a^2 + 2a = 0$

$a(a + 2) = 0$

de unde

$a_1 = -2$

$a_2 = 0$

c) Suma $A(2) + A(4) + A(6) + \ldots + A(100)$ conține 50 de termeni.

Se calculează suma:

$$A(2)+A(4)+A(6)+\cdots+A(100)=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&4&5\\0&1&6\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&6&7\\0&1&8\\0&0&1\end{pmatrix}+$$

$$\cdots+\begin{pmatrix}1&100&101\\0&1&102\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1+1+1+\cdots+1 & 2+4+6+\cdots+100 & 3+5+7+\cdots+101\\0+0+0+\cdots+0 & 1+1+1+\cdots+1 & 4+6+8+\cdots+102\\0+0+0+\cdots+0 & 0+0+0+\cdots+0 & 1+1+1+\cdots+1\end{pmatrix}$$

Se calculează sumele de pe pozițiile matricei:

$0 + 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$

$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = 50$ (suma are 50 de termini)

Celelalte sume aparțin unor progresii aritmetice pentru care se cunosc primul și ultimul termen. Acestea se calculează folosind formula:

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$$

Se obține:

$$2+4+6+\cdots+100=\frac{(2+100)\cdot 50}{2}=\frac{102\cdot 50}{2}=50\cdot 51$$

$$3+5+7+\cdots+101=\frac{(3+101)\cdot 50}{2}=\frac{104\cdot 50}{2}=50\cdot 52$$

$$4+6+8+\cdots+102=\frac{(4+102)\cdot 50}{2}=\frac{106\cdot 50}{2}=50\cdot 53$$

Revenind în formula inițială, se obține:

$$A(2)+A(4)+A(6)+\cdots+A(100)=\begin{pmatrix}50&50\cdot 51&50\cdot 52\\0&50&50\cdot 53\\0&0&50\end{pmatrix}=$$

$$50\begin{pmatrix}1&51&52\\0&1&53\\0&0&1\end{pmatrix}=50\begin{pmatrix}1&51&51+1\\0&1&51+2\\0&0&1\end{pmatrix}=50A(51),$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

2.

a) Se înlocuiește $X = 0$ în expresia polinomului și se obține $f(0) = 0^3 - 4\cdot 0^2 + m\cdot 0 + 2 = 2$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

b) Se scriu relațiile lui Viete pentru ecuația $f(X) = 0$.

$x_1 + x_2 + x_3 = 4$ (1)

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = m$ (2)

$x_1x_2x_3 = -2$ (3)

Se înlocuiește relația $x_1 = x_2 + x_3$ în relația (1) și se obține:

$x_1 + x_1 = 4$

$2x_1 = 4$

$x_1 = 2$

Valoarea soluției $x_1 = 2$ se înlocuiește în relațiile (2) și (3):

$2x_2 + 2x_3 + x_2x_3 = m$ (2')

$2x_2x_3 = -2$ (3')

sau încă:

$2(x_2 + x_3) + x_2x_3 = m$ (2")

$x_2x_3 = -1$ (3")

Valoarea lui m se obține înlocuind relațiile (1) și (3") în relația (2").

$m = 2x_1 - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$.

c) Pentru $m = 8$ forma polinomului f este $f = X^3 - 4X^2 + 8X + 2$ pentru care trebuie să se arate că nu are toate rădăcinile reale.

Se scriu relațiile lui Viete pentru ecuația $f(X) = 0$.

$x_1 + x_2 + x_3 = 4$ (1)

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 8$ (2)

$x_1x_2x_3 = -2$ (3)

Se ridică relația (1) la pătrat și se obține:

$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 4^2$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 = 16$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 16 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 16 - 2 \cdot 8$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 16 - 16$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$

O sumă de pătrate nu poate fi nulă decât în situația în care toți termenii sunt nuli (situație care nu se verifică pentru cazul de față, întrucât soluția $x = 0$ nu verifică ecuația) sau în cazul în care unii termeni sunt numere complexe al căror pătrat are o valoare negativă care să anuleze valorile pozitive.

Prin urmare, pentru valoarea $m = 8$, polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea

1.

a) O funcție de forma $f(x) = u(x)v(x)$ are derivata de ordinal întâi $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

În cazul de față avem:

$u(x) = e^x$ cu $u'(x) = e^x$

$v(x) = x^2 - 6x + 9$ cu $v'(x) = 2x - 6$

Înlocuind în formula inițială avem:

$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = e^x(x^2 - 6x + 9) + e^x(2x - 6) = e^x(x^2 - 6x + 9 + 2x - 6) = e^x(x^2 - 4x + 3)$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

b) Se determină limitele la capetele domeniului de definiție al funcției, penru a determina ecuațiile asimptotelor orizontale:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x(x^2-6x+9) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-6x+9}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-6}{-e^{-x}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^x(x^2-6x+9) = +\infty$$

Prin urmare, funcția f are o asimptotă orizontală numai către $-\infty$ și aceasta este $y = 0$.

Punctele de extrem local ale funcției f sunt cele în care derivata de ordinul întâi se anulează:

$f'(x) = 0$
$e^x(x^2 - 4x + 3) = 0$
Se rezolvă ecuația de gradul al doilea $x^2 - 4x + 3 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{4}}{2}$$
$$= \frac{4\pm 2}{2} = 2 \pm 1$$

de unde:
$x_1 = 2 - 1 = 1$
$x_2 = 2 + 1 = 3$

Se calculează valoarea funcției f în punctele de extrem local:
$f(x_1) = f(1) = e^1(1^2 - 6\cdot 1 + 9) = e(1 - 6 + 9) = 4e$
$f(x_2) = f(3) = e^3(3^2 - 6\cdot 3 + 9) = e(9 - 18 + 9) = 0$

Se studiază monotonia funcției pe intervalul de definiție:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + + + + + + + + + + + + + +		0	– – – – –	0	+ + + + + + + + + + + + + +	
$f(x)$	0	↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗	4e	↘ ↘ ↘ ↘	0	↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗	$+\infty$

Se observă că funcția $f(x)$ este pozitivă pe întregul interval de definiție.

Pe intervalul $(-\infty, 1]$ funcția $f(x)$ este crescătoare de la valoarea 0 la valoarea $4e$ (punct de maxim local).

Pe intervalul $(1, 3)$ funcția $f(x)$ este descrescătoarea de la valoarea $4e$ la valoarea 0 (punct de minim local).

Pe intervalul $[3, +\infty)$ funcția $f(x)$ este crescătoare de la valoarea 0 la valoarea $+\infty$.

c) Se observă faptul că funcția $f(x) = e^x(x^2 - 6x + 9) = e^x(x - 3)^2$ precum și faptul că pe intervalul $(-\infty, 3]$ valoarea maximă a funcției $f(x)$ este $4e$, valoare care se obține pentru valoarea $x = 1$.

Prin urmare, pentru intervalul $(-\infty, 3]$ are loc inegalitatea $e^x(x - 3)^2 \leq 4e$.

2.

a) Se calculează valoarea integralei I penru n = 1:

$$I_1 = \int_0^1 (1 - x^3)\, dx = \left(x - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1^4}{4} - 0 + \frac{0^4}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

b) Se cere să se demonstreze că $I_{n+1} \leq I_n$ sau încă $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1 - x^3)^{n+1}\, dx - \int_0^1 (1 - x^3)^n\, dx = \int_0^1 [(1 - x^3)^{n+1} - (1 - x^3)^n]\, dx$$
$$= \int_0^1 (1 - x^3)^n (1 - x^3 - 1) dx = -\int_0^1 [(1 - x)(1 + x + x^2)]^n x^3 dx$$
$$= -\int_0^1 (1 - x)^n (1 + x + x^2)^n x^3 dx$$

Pe intervalul [0,1], avem:
$(1 - x)^n \geq 0$
$(1 + x + x^2)^n \geq 0$
$x^3 \geq 0$

Prin urmare, rezultă că $I_{n+1} - I_n \leq 0$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

c) Se folosește formula de integrare prin părți

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = f(x) g(x)\, \Big|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

precum și faptul că $x' = 1$.

Folosind aceste egalități în formula integralei I_{n+1}, obținem:

$$I_{n+1} = \int_0^1 (1-x^3)^{n+1}dx = \int_0^1 x'(1-x^3)^{n+1}dx$$

$$= x(1-x^3)^{n+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot(n+1)(1-x^3)^n(-3x^2)\,dx$$

$$= 1\cdot(1-1^3)^{n+1} - 0\cdot(1-0^3)^{n+1} - 3(n+1)\int_0^1 (-x^3)(1-x^3)^n dx$$

$$= -3(n+1)\int_0^1 (1-x^3-1)(1-x^3)^n dx$$

$$= -3(n+1)\int_0^1 (1-x^3)(1-x^3)^n dx + 3(n+1)\int_0^1 (1-x^3)^n dx$$

$$= -3(n+1)\int_0^1 (1-x^3)^{n+1} dx + 3(n+1)\int_0^1 (1-x^3)^n dx$$

$$= -3(n+1)I_{n+1} + 3(n+1)I_n$$

$I_{n+1} = -3(n+1)I_{n+1} + 3(n+1)I_n$
$I_{n+1} + 3(n+1)I_{n+1} = 3(n+1)I_n$
$I_{n+1}[1 + 3(n+1)] = 3(n+1)I_n$
$I_{n+1}(1 + 3n + 3) = 3(n+1)I_n$
$I_{n+1}(3n+4) = 3(n+1)I_n$

$$I_{n+1} = \frac{3(n+1)}{3n+4}I_n$$

ceea ce trebuia demonstrat.