REZOLVAREA SUBIECTELOR PROPUSE LA PROBA DE MATEMATICĂ – E.c) – SPECIALIZAREA MATEMATICĂ-INFORMATICĂ LA EXAMENUL DE BACALAUREAT NAŢIONAL 26 AUGUST 2015

SUBIECTUL I

1. Se cunoaște că $a_1 = 2$ și $a_2 = a_1 + r = 5$. Din aceste relații se obține rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, $r = 3$.

Al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ poate fi determinat în două moduri:
$a_3 = a_2 + r = 5 + 3 = 8$.
$a_3 = a_1 + 2r = 2 + 2\cdot 3 = 2 + 6 = 8$.

Prin urmare, al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este $a_3 = 8$.

2. Faptul că punctul $A(3, 5)$ aparține graficului funcției f se traduce prin faptul că în punctul $x = 3$ valoarea funcției este $y = f(x) = 5$.

Așadar, relația se mai poate scrie $f(3) = 5$ sau, înlocuind în expresia funcției f, avem:
$a - 3 = 5$
de unde
$a = 8$.

Ca atare, funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ are expresia $f(x) = 8 - x$.

3. Ecuația $8^{4-x} = 2^{2x+2}$ se mai poate scrie (ținând cont de faptul că $8 = 2^3$ precum și de faptul că $(a^x)^y = a^{xy}$) $2^{3(4-x)} = 2^{2x+2}$ sau încă $2^{12-3x} = 2^{2x+2}$.

Având în vedere că funcția exponențială $f(x) = a^{g(x)}$ este bijectivă, o egalitate de tipul $a^{u(x)} = a^{v(x)}$ este echivalentă cu $u(x) = v(x)$.

Aplicând această proprietate în cazul de mai sus, obținem:
$12 - 3x = 2x + 2$
$5x = 10$
$x = 2$

Mulțimea soluțiilor ecuației inițiale este S = { 2 }.

4. Probabilitatea ca alegând un număr natural format din 2 cifre acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 0 se determină ca raport între cardinalul mulțimii numerelor al căror produs este nul (notată cu M) și cardinalul mulțimii tuturor numerelor naturale de 2 cifre (notată cu N).

Numerele formate din 2 cifre al căror produs este nul sunt terminate în 0, mulțimea lor având 9 elemente: $M = \{ 10, 20, \ldots, 90 \}$.

Mulțimea numerelor naturale de 2 cifre conține 90 de numere $N = \{ 10, 11, \ldots, 99 \}$.

Se obține că alegând un număr din mulțimea numerelor naturale formate din două cifre probabilitatea ca produsul cifrelor să fie nul este:

$$P = \frac{card(M)}{card(N)} \times 100 = \frac{9}{90} \times 100 = \frac{1}{10} \times 100 = 10\%$$

5. Ecuația unei drepte d care trece printr-un punct $M(x_0, y_0)$, având panta m este:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Înlocuind valorile din enunțul exercițiului, se obține:

$$y - 1 = 2(x - 1)$$
$$y - 1 = 2x - 2$$
$$2x - y - 1 = 0$$

6. Se observă faptul că 5, 12 și 13 sunt numere pitagorice ($13^2 = 5^2 + 12^2$), prin urmare triunghiul ABC este dreptunghic cu unghiul A având valoarea de 90° ($BC^2 = AB^2 + AC^2$).

Astfel, se poate calcula $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{13}$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

SUBIECTUL al II-lea

1.

a) Se determină matricea $A(1)$.

$$A(1) = \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 2\cdot 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1+2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Astfel, se poate calcula determinantul matricii $A(1)$:

$$det(A(1)) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2[0\cdot 0 - 1\cdot(-1)] = 2(0+1) = 2\cdot 1 =$$
2, adică cee ace trebuia demonstrat.

b) Se calculează produsul matricilor $A(x)$ și $A(y)$.

$$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1+2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-y & 0 & 2y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1+2y \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (1-x)(1-y)+0\cdot 0+2x\cdot(-y) & (1-x)\cdot 0+0\cdot 1+2x\cdot 0 & (1-x)\cdot 2y+0\cdot 0+2x(1+2y) \\ 0\cdot(1-y)+1\cdot 0+0\cdot(-y) & 0\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 & 0\cdot 2y+1\cdot 0+0\cdot(1+2y) \\ -x\cdot(1-y)+0\cdot 0+(1+2x)\cdot(-y) & -x\cdot 0+0\cdot 1+(1+2x)\cdot 0 & -x\cdot 2y+0\cdot 0+(1+2x)(1+2y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-y-x+xy+0-2xy & 0+0+0 & 2y-2xy+0+2x+4xy \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ -x+xy+0-y-2xy & 0+0+0 & -2xy+0+1+2x+2y+4xy \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1-x-y-xy & 0 & 2x+2y+2xy \\ 0 & 1 & 0 \\ -x-y-xy & 0 & 1+2x+2y+2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(x+y+xy) & 0 & 2(x+y+xy) \\ 0 & 1 & 0 \\ -(x+y+xy) & 0 & 1+2(x+y+xy) \end{pmatrix} =$$
$A(x+y+xy)$,
adică cee ce trebuia demonstrate.

c) Se știe că $A(x)A(x)A(x) = A(7)$.

Pe baza relației demonstrate anterior, se calculează termenii ecuației.

$A(x)A(x)A(x) = A(x + x + x^2)A(x) = A(2x + x^2)A(x) = A(2x + x^2 + x + (2x + x^2)\cdot x) = A(3x + x^2 + 2x^2 + x^3) = A(3x + 3x^2 + x^3)$

Se egalează cei doi termeni ai ecuației:

$x^3 + 3x^2 + 3x = 7$
$x^3 + 3x^2 + 3x – 7 = 0$

Se observă că $x = 1$ este soluție a ecuației. Se calculează rezultatul împărțirii polinomului $f(X) = X^3 + 3X^2 + 3X – 7$ la $g(X) = X – 1$.

$$\begin{array}{r|l} X^3 + 3X^2 + 3X - 7 & X - 1 \\ \hline -X^3 + X^2 \qquad\qquad & X^2 + 4X + 7 \\ \overline{\qquad\qquad} \qquad\qquad & \\ 4X^2 + 3X - 7 & \\ -4X^2 + 4X \quad\; & \\ \overline{\qquad\qquad} \quad\; & \\ 7X - 7 & \\ -7X + 7 & \\ \overline{\qquad} & \\ 0 & \end{array}$$

Astfel, ecuația $x^3 + 3x^2 + 3x – 7 = 0$ se mai poate scrie ca $(x – 1)(x^2 + 4x + 7) = 0$ cu soluția $x_1 = 1$ și cu $x_{2,3}$ ca soluții ale ecuației $x^2 + 4x + 7 = 0$. Se observă că discriminantul ecuației de gradul al doilea $\Delta = 4^2 – 4\cdot 7 = 16 – 28 = –12 < 0$, așadar ecuația de gradul al doilea nu are soluții reale.

Unica valoare reală pentru care $A(x)A(x)A(x) = A(7)$ este $x = 1$.

2.

a) Se înlocuiește $X = 0$ în expresia polinomului și se obține $f(0) = 0^3 + 2\cdot 0^2 + 0 + m = m$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

b) Pentru $m = 1$, polinomul f are expresia $f(X) = X^3 + 2X^2 + X + 1$.
Se scriu relațiile lui Viete pentru ecuația $f(X) = 0$.
$x_1 + x_2 + x_3 = –2$ (1)
$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1$ (2)
$x_1x_2x_3 = –1$ (3)

Se cere să se demonstreze că: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 5x_1x_2x_3$.

Se ridică relația (1) la cub:
$(x_1 + x_2 + x_3)^3 = (-2)^3$
$[(x_1 + x_2) + x_3]^3 = -8$
$(x_1 + x_2)^3 + 3(x_1 + x_2)^2 x_3 + 3(x_1 + x_2)x_3^2 + x_3^3 = -8$
$x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 + 3(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2)x_3 + 3x_1x_3^2 + 3x_2x_3^2 + x_3^3 = -8$
$x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 + 3x_1^2x_3 + 6x_1x_2x_3 + 3x_2^2x_3 + 3x_1x_3^2 + 3x_2x_3^2 + x_3^3 = -8$
$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -8 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 - 3x_1^2x_3 - 3x_2^2x_3 - 3x_1x_3^2 - 3x_2x_3^2 - 6x_1x_2x_3$
$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -8 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) - 3x_1x_3(x_1 + x_3) - 3x_2x_3(x_2 + x_3) - 6x_1x_2x_3$
Se înlocuiesc sumele de perechi de soluții ale ecuației conform relației (1) și se înlocuiește și relația (3):
$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -8 - 3x_1x_2(-2 - x_3) - 3x_1x_3(-2 - x_2) - 3x_2x_3(-2 - x_1) - 6 \cdot (-1)$
$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -2 + 6x_1x_2 + 3x_1x_2x_3 + 6x_1x_3 + 3x_1x_2x_3 + 6x_2x_3 + 3x_1x_2x_3$
$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -2 + 6(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 9x_1x_2x_3$
Se înlocuiesc relațiile (2) și (3) și se obține:
$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -2 + 6 \cdot 1 + 9 \cdot (-1)$
$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -2 + 6 - 9$
$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -5$
$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 5 \cdot (-1)$
Se înlocuiește relația (3) și se obține:
$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 5x_1x_2x_3$, adică ceea ce trebuia demonstat

c) Fie x_1 rădăcina polinomului f, cu proprietatea $x_1 \in \mathbf{Z}$. Atunci $f(x_1) = 0$.
Se înlocuiește x_1 în expresia polinomului f și se obține:
$x_1^3 + 2x_1^2 + x_1 + m = 0$
$x_1^3 + 2x_1^2 + x_1 = -m$
$x_1(x_1^2 + 2x_1 + 1) = -m$
$x_1(x_1 + 1)^2 = -m$
Întrucât m este număr prim și acesta se poate scrie ca produs de doi factori, înseamnă că în mod obligatoriu unul dintre factori trebuie să fie 1:
Dacă $x_1 = 1$ rezultă că $m = -4$, dacă $x_1 = -1$ rezultă că $m = 0$, valori care nu fac parte din mulțimea numerelor naturale prime.
Rezultă că singura soluție este $(x_1 + 1)^2 = 1$ care se mai poate scrie $x_1^2 + 2x_1 + 1 = 1$ adică $x_1^2 + 2x_1 = 0$ sau încă $x_1(x_1 + 2) = 0$.
Pentru $x_1 = 0$ se obține $m = 0$, care nu face parte din mulțimea numerelor naturale prime.
Pentru $x_1 = -2$, se obține $m = 2$, care face parte din mulțimea numerelor naturale prime.
Prin urmare, singura valoare naturală a lui m prim pentru care polinomul f acceptă o rădăcină întreagă este $m = 2$.

SUBIECTUL al III-lea

1.

a) Derivata de ordin întâi a unei funcții de forma unei sume de funcții $f(x) = u(x) + v(x)$ este data de suma derivatelor funcțiilor componente: $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

În cazul de față, obținem:

$$f'(x) = (x)' - \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = 1 - \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

b) Pentru a determina ecuația asimptotei orizontale a funcției $f(x)$ la $+\infty$ se calculează limita acestei funcții către $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x^2+1)}{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-1}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = 0$$

Prin urmare, ecuația asimptotei la $+\infty$ a funcției $f(x)$ este $y = 0$.

c) Pentru a studia monotonia funcției $f'(x)$ se determină semnul derivatei de ordinul al doilea $f''(x)$.

$$f''(x) = 1' - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = -\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)'$$

Formula de derivare pentru funcții de forma $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ este $f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v\prime(x)}{v^2(x)}$ unde, în cazul de față, $u(x) = x$ și $v(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Se determină derivatele de ordin întâi ale acestor funcții:

$$u'(x) = 1$$
$$v'(x) = \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Înlocuind în formula inițială, obținem:

$$f''(x) = -\frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} = -\frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$
$$= -\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} < 0, \forall x \in \boldsymbol{R}$$

Întrucât derivata de ordinul al doilea este negativă pe toată mulțimea $\boldsymbol{R}$, rezultă că derivata de ordinul întâi este descrescătoare pe același interval.

2.

a)

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

ceea ce trebuia demonstrat.

b) Aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției *f*, axa O*x* și dreptele de ecuații *x* = 1, respectiv *x* = *e* se calculează cu integrala

$$\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \ln x\, dx = \int_1^e (x)' \ln x\, dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x(\ln x)' dx$$
$$= e \ln e - 1 \ln 1 - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e - \int_1^e dx = e - x \Big|_1^e = e - (e-1)$$
$$= e - e + 1 = 1$$

c) Se observă faptul că

$$\frac{1}{x} = (\ln x)' = f'(x)$$

Integrala devine:

$$\int_1^e \frac{1}{x}(f(x))^n dx = \int_1^e f'(x)(f(x))^n dx = \frac{1}{n+1}\int_1^e (n+1)f'(x)(f(x))^n dx$$
$$= \frac{1}{n+1}\int_1^e \left[\left(f(x)\right)^{n+1}\right]' dx = \frac{\left(f(x)\right)^{n+1}}{n+1}\Big|_1^e = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}\Big|_1^e$$
$$= \frac{(\ln e)^{n+1}}{n+1} - \frac{(\ln 1)^{n+1}}{n+1} = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Se cere să se determine *n* astfel încât

$$\int_1^e \frac{1}{x}(f(x))^n dx = \frac{1}{2015}$$

Înlocuind, obținem:

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2015}$$

de unde

$$n + 1 = 2015$$

adică

$$n = 2014.$$