REZOLVAREA SUBIECTELOR PROPUSE
LA PROBA DE ALGEBRĂ ŞI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ
– VARIANTA B –
LA EXAMENUL DE ADMITERE
ÎN UNIVERSITATEA POLITEHNICA BUCUREŞTI
2015

1. Mulțimea soluțiilor inecuației $|x+1| \leq 3$ este:

a) {-4}; b) $\emptyset$; c) {2}; d) [-4, 2]; e) [-3, 3]; f) [-4, 0].

Se explicitează modulul:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, x \in [-1,+\infty) \\ -x-1, x \in (-\infty,-1) \end{cases}$$

Se rezolvă inecuația pentru fiecare dintre cele două intervale în parte, urmând ca ulterior soluțiile obținute să se reunească:

Cazul 1. $x \in [-1,+\infty)$

$x+1 \leq 3$

$x \leq 2$

$x \in (-\infty, 2] \cap [-1,+\infty) = [-1,2]$

Cazul 2. $x \in (-\infty,-1)$

$-x-1 \leq 3$

$x \geq -4$

$x \in [-4,+\infty) \cap (-\infty,-1) = [-4,-1)$

Se reunesc soluțiile obținute pentru fiecare din cele două cazuri în parte spre a se obține mulțimea soluțiilor inecuației inițiale:

$S = [-1,2] \cup [-4,-1) = [-4,2]$

Răspuns corect: $\boxed{\mathbf{d}}$.

2. Mulțimea soluțiilor ecuației $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ este:

a) {0, 1, 2}; b) {0, 2}; c) {-1, 0, 1}; d) {1, 2, 3}; e) {-2, 0, 1}; f) {1, 2, 4}.

Ecuația inițială se mai poate scrie ca produs de factori, dând factor comun pe x:

$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$x(x^2 - 3x + 2) = 0$

Se egalează cu 0 fiecare dintre cei doi factori, pentru a se obține cele trei soluții ale ecuației:

$x_1 = 0$

$x^2 - 3x + 2$

Se rezolvă ecuația de gradul al doilea:

$$x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

de unde:

$$x_2 = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_3 = \frac{3 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Mulțimea soluțiilor ecuației inițiale este S = {0, 1, 2}.

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{a}}$.

3. Fie funcția $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + m, x \leq 1 \\ 2x + 1, x > 1 \end{cases}$. Să se afle $m \in \boldsymbol{R}$, astfel încât funcția f să fie continuă.

a) $m = 2$; b) $m = \frac{1}{3}$; c) $m = \frac{1}{2}$; d) $m = -2$; e) $m = 4$; f) $m = -5$.

Pe intervalele $x \in (-\infty, 1)$ respectiv $x \in (1, +\infty, 1)$, funcția f este continuă, fiind vorba de funcții de gradul al doilea, respectiv de gradul întâi.

Trebuie studiată și continuitatea în punctul $x = 1$:

$$f_s(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = f_d(1)$$

Se calculează valorile laterale ale funcției:

$$f_s(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 1^2 + m = m + 1$$

$$f_d(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$$

Se egalează cele două valori ale funcției în punctul $x = 1$:

$m + 1 = 3$

$m = 2$

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{a}}$.

4. Dacă $E = \log_2 20 - \log_4 25$, atunci:

a) $E = 2$; b) $E = 4$; c) $E = 0$; d) $E = -2$; e) $E = 3$; f) $E = -3$.

Pentru calcularea valorii expresiei E se folosesc formulele:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Astfel, se calculează separat cei doi termeni ai expresiei:

$$\log_2 20 = \log_2(2^2 \cdot 5) = \log_2 2^2 + \log_2 5 = 2\log_2 2 + \log_2 5 = 2 + \log_2 5$$

$$\log_4 25 = \frac{\log_2 25}{\log_2 4} = \frac{\log_2 5^2}{2} = \frac{2\log_2 5}{2} = \log_2 5$$

Revenind la calculul expresiei E, se obține:

$E = \log_2 20 - \log_4 25 = 2 + \log_2 5 - \log_2 5 = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{a}}$.

5. Să se rezolve ecuația $\sqrt{2x+1} + 2x = 5$.

a) $x = 11$; b) $x \in \left\{\frac{3}{2}, 4\right\}$; c) $x = 4$; d) $x = \frac{3}{2}$; e) $x = \frac{1}{6}$; f) $x = 15$.

Se pune condiția de existență a radicalului $\sqrt{2x+1}$:

$$2x + 1 \geq 0$$

$$2x \geq -1$$

$$x \geq -\frac{1}{2}$$

$$x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Ecuația se mai poate scrie:

$$\sqrt{2x+1} = 5 - 2x$$

Întrucât radicalul poate avea numai valori pozitive, se pune condiția ca membrul drept al egalității să fie pozitiv:

$$5 - 2x \geq 0$$

$$2x \leq 5$$

$$x \leq \frac{5}{2}$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$$

Prin urmare, soluția ecuației trebuie să facă parte din intervalul:

$$x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{5}{2}\right] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$$

Se ridică la pătrat ambii termeni ai ecuației:

$$\sqrt{2x+1} = 5 - 2x |(\quad)^2$$

$$2x + 1 = 5^2 + 2\cdot 5\cdot(-2x) + (-2x)^2$$

$$2x + 1 = 25 - 20x + 4x^2$$

$$4x^2 - 22x + 24 = 0$$

$$2x^2 - 11x + 12 = 0$$

Se rezolvă ecuația de gradul al doilea:

$$x_{1,2} = \frac{-(-11) \pm \sqrt{11^2 - 4\cdot 2\cdot 12}}{2\cdot 2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-96}}{4} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{11 \pm 5}{4}$$

de unde:

$$x_1 = \frac{11-5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$$

$$x_2 = \frac{11+5}{4} = \frac{16}{4} = 4 \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$$

Prin urmare, mulțimea soluțiilor ecuației este: $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{d}}$.

6. Să se resolve ecuația: $5^{\frac{x+1}{2}} = \sqrt{5}$:

a) $x = -1$; b) $x = 1$; c) $x = -3$; d) $x = 0$; e) $x = 4$; f) $x = 2$.

Întrucât funcția exponențială este bijectivă, o egalitate de tipul $a^{u(x)} = a^{v(x)}$ cu $a \in \boldsymbol{R}$ constant, este echivalentă cu $u(x) = v(x)$.

Astefel, ecuația $5^{\frac{x+1}{2}} = \sqrt{5}$, rescrisă ca $5^{\frac{x+1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}}$ este echivalentă cu:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{1}{2}$$

sau, prin înmulțirea ambilor membri ai ecuației cu 2:

$x + 1 = 1$

$x = 0.$

Mulțimea soluțiilor ecuației este S = { 0 }.

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{d}}$.

7. Într-o progresie geometrică de numere pozitive $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_2 = 3$ și $a_4 = 12$. Să se calculeze a_3.

a) $\frac{5}{3}$; b) $\frac{1}{6}$; c) 8; d) 9; e) 4; f) 6.

Se scriu expresiile pentru termenul al 2-lea și al 4-lea al progresiei geometrice în funcție de termenul inițial a_0 și de rația $r > 0$ (de vreme ce progresia geometrică este formată exclusiv din numere pozitive) $a_n = a_1 r^{n-1}$.

Astfel, $a_2 = a_1 r$ și $a_4 = a_1 r^3$.

Se determină raportul celor două valori:

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_1 r^3}{a_1 r} = r^2 = \frac{12}{3} = 4$$

Soluțiile ecuației $r^2 = 4$ sunt $r_1 = -2$ și $r_2 = 2$. Dar $r > 0$ și prin urmare $r = 2$.

$a_3 = a_2 r = 3\cdot 2 = 6.$

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{f}}$.

8. Fie funcția $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x + e^{2x}$. Să se calculeze $f'(0)$.

a) –1; b) $\frac{1}{2}$; c) 4; d) $-\frac{3}{2}$; e) 3; f) –2.

Se calculează $f'(x)$ și ulterior $f'(0)$.

$f'(x) = (x)' + (e^{2x})' = 1 + 2e^{2x}.$

$f'(0) = 1 + 2e^{2\cdot 0} = 1 + 2e^0 = 1 + 2 = 3.$

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{e}}$.

9. Să se calculeze $E = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3$.

a) E = 3; b) E = 8; c) E = 11; d) E = 14; e) E = 10; f) E = 16.

Se folosește formula:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

de unde:

$$C_3^0 = \frac{3!}{0! \cdot 3!} = 1$$

$$C_3^1 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = \frac{2! \cdot 3}{1! \cdot 2!} = 3$$

$$C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{2! \cdot 3}{2! \cdot 1!} = 3$$

$$C_3^3 = \frac{3!}{3!\,0!} = 1$$

Astfel:

$$E = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8.$$

Răspuns corect: $\boxed{\mathbf{b}}$.

10. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{1+i}{1-i}$.

a) 1; b) 2; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 0; f) $\frac{3}{2}$.

Modulul unui număr complex de forma $z = a + bi$ este $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ca atare, numărul complex z trebuie adus la această formă.

$$z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{1+2i-1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$$

Astfel, în expresia de mai sus avem a = 0 şi b = 1.

Se obține că modulul numărului complex z este $|z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\mathbf{a}}$.

11. Fie sistemul $\begin{cases} x-2y=m \\ 2x+y=n \end{cases}$. Să se determine numerele m și n astfel încât x = 2, y = 1 să fie soluție a sistemului.

a) m = 2, n = 1; b) m = 0, n = 5; c) m = 1, n = 4; d) m = –1, n = 3; e) m = 3, n = 1; f) m = 4, n = 3.

Se înlocuiesc valorile x = 2, y = 1 în sistemul de ecuații inițial, pentru a se obține valorile pentru parametrii m și n.

$$\begin{cases} 2-2\cdot 1=m \\ 2\cdot 2+1=n \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=2-2 \\ n=4+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=0 \\ n=5 \end{cases}$$

Răspuns corect: $\boxed{\mathbf{b}}$.

12. Să se rezolve inecuația $3x-1\geq 2x$.

a) $x\geq 1$; b) $x\in\emptyset$; c) $x\geq 5$; d) $x\in[-1{,}0]$; e) $x\leq\frac{1}{5}$; f) $x\leq\frac{1}{3}$.

Se trec termenii dependenți de x, respectiv constantele în părți distincte ale inecuației:

$3x-1\geq 2x$

$x\geq 1$

$x\in[1,+\infty)$

Răspuns corect: $\boxed{\mathbf{a}}$.

13. Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{\varepsilon}^{1}x^{2015}\ln x\,dx$.

a) $-\infty$; b) $-\frac{1}{2016^2}$; c) $-\frac{1}{2015}$; d) $-\frac{1}{2014}$; e) $-\frac{1}{2015^2}$; f) 0.

Se calculează inițial integrala $\int_{\varepsilon}^{1}x^{2015}\ln x\,dx$, pentru ca ulterior să se calculeze limita $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{\varepsilon}^{1}x^{2015}\ln x\,dx$.

Pentru calculul integralei se folosește formula de integrare prin părți:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

$$=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

$$\int_{\varepsilon}^{1} x^{2015}\ln x\,dx = \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{2016}\cdot(2016x^{2015})\ln x\,dx = \frac{1}{2016}\int_{\varepsilon}^{1}(x^{2016})'\ln x\,dx$$

$$= \frac{1}{2016}x^{2016}\ln x\,\Big|_{\varepsilon}^{1} - \frac{1}{2016}\int_{\varepsilon}^{1} x^{2016}(\ln x)'dx$$

$$= \frac{1}{2016}1^{2016}\ln 1 - \frac{1}{2016}\varepsilon^{2016}\ln\varepsilon - \frac{1}{2016}\int_{\varepsilon}^{1} x^{2016}\cdot\frac{1}{x}dx \quad \begin{matrix} = \\ \ln 1 = 0 \end{matrix}$$

$$-\frac{1}{2016}\varepsilon^{2016}\ln\varepsilon - \frac{1}{2016}\int_{\varepsilon}^{1} x^{2015}dx$$

$$= -\frac{1}{2016}\varepsilon^{2016}\ln\varepsilon - \frac{1}{2016^2}x^{2016}\Big|_{\varepsilon}^{1}$$

$$= -\frac{1}{2016}\varepsilon^{2016}\ln\varepsilon - \frac{1}{2016^2}1^{2016} + \frac{1}{2016^2}\varepsilon^{2016}$$

$$= -\frac{1}{2016^2} + \frac{1}{2016^2}\varepsilon^{2016}(1 - 2016\ln\varepsilon)$$

Astfel, limita inițială devine:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{\varepsilon}^{1} x^{2015}\ln x\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\left[-\frac{1}{2016^2} + \frac{1}{2016^2}\varepsilon^{2016}(1 - 2016\ln\varepsilon)\right]$$

$$= -\frac{1}{2016^2} + \frac{1}{2016^2}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\varepsilon^{2016}(1 - 2016\ln\varepsilon)$$

Prin urmare, calculul limitei inițiale se reduce la calcularea $\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\varepsilon^{2016}(1 - 2016\ln\varepsilon)$, care prezintă un caz de nedeterminare $0\cdot\infty$. Aceasta se va calcula folosind teorema lui Rolle:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\varepsilon^{2016}(1 - 2016\ln\varepsilon) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\frac{1 - 2016\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon^{2016}}} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\frac{-2016\cdot\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{2016}{\varepsilon^{2017}}} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\varepsilon^{2016} = 0$$

Ca atare, rezultatul limitei inițiale este:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{\varepsilon}^{1} x^{2015}\ln x\,dx = -\frac{1}{2016^2} + \frac{1}{2016^2}\cdot 0 = -\frac{1}{2016^2}$$

Răspuns corect: $\boxed{\mathbf{b}}$.

14. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine $m \in \boldsymbol{R}$ astfel încât matricea A să fie inversabilă.

a) $m \neq -\frac{1}{3}$; b) $m \neq 0$; c) $m \neq \frac{1}{2}$; d) $m \neq 1$; e) $m \neq -\frac{1}{4}$; f) $m \neq \frac{1}{4}$.

Matricea inversă A^{-1} se calculează după formula:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$$

Prin urmare, condiția de existență a matricei inverse A^{-1} presupune ca $\det A \neq 0$.

Se calculează determinantul matricei A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} m & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} m & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - 2(m \cdot 1 - 3 \cdot 0) + 3(m \cdot 0 - 1 \cdot 0)$$
$$= 1 - 2(m - 0) + 3(0 - 0) = 1 - 2m$$

Condiția inițială devine:

$1 - 2m \neq 0$

$2m \neq 1$

$m \neq \frac{1}{2}$

Răspuns corect: $\boxed{c}$.

15. Fie funcția $f : (0, \infty) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^2 - \ln x$. Să se determine abscisa punctului de extrem local al funcției f.

a) $\frac{1}{e}$; b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\frac{1}{2}$; f) 1.

Punctul de extrem local al funcției f este acel punct $x \in (0, \infty)$ pentru care $f'(x) = 0$.

Se calculează derivata de ordinul întâi al funcției f.

$$f'(x) = (x^2)' - (\ln x)' = 2x - \frac{1}{x}$$

$f'(x) = 0$

$2x - \frac{1}{x} = 0$

Întrucât $x \neq 0$ se poate înmulți expresia cu x:

$2x^2 - 1 = 0$

Se rezolvă ecuația de gradul al doilea:

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} = \pm\frac{\sqrt{8}}{4} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

de unde:

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \notin (0,\infty)$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \in (0,\infty)$$

Prin urmare abscisa punctului de extrem local este $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{d}}$.

16. Să se calculeze $\int_0^1 (x^3 + x)dx$.

a) $\frac{3}{5}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{4}{3}$; e) $\frac{1}{3}$; f) $\frac{4}{5}$.

$$\int_0^1 (x^3 + x)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1^4}{4} + \frac{1^2}{2} - \frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{c}}$.

17. Câte soluții reale are ecuația $\big|\left||x-1|-1\right|-1\big| = 1$?

a) o infinitate; b) cinci; c) patru; d) șase; e) trei; f) două.

Se explicitează, pe rând, modulele:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, x \in [1,+\infty) \\ 1-x, x \in (-\infty,1) \end{cases}$$

Cazul 1. $x \in [1,+\infty)$

Ecuația devine:

$$\left||x-1-1|-1\right| = 1$$

$$\left||x-2|-1\right| = 1$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, x \in [2,+\infty) \cap [1,+\infty) = [2,+\infty) \\ 2-x, x \in (-\infty,2) \cap [1,+\infty) = [1,2) \end{cases}$$

Cazul 1.1. $x \in [1,2)$

$|2 - x - 1| = 1$

$|1 - x| = 1$

$$|1 - x| = \begin{cases} 1 - x, x \in (-\infty, 1] \cap [1,2) = \{1\} \\ x - 1, x \in (1, +\infty) \cap [1,2) = (1,2) \end{cases}$$

Cazul 1.1.1 $x = \{ 1 \}$

$1 - x = 1$

$x = 0 \notin \{1\}$

Cazul 1.1.2 $x \in (1,2)$

$x - 1 = 1$

$x = 2 \notin (1,2)$

Cazul 1.2. $x \in [2, +\infty)$

$|x - 2 - 1| = 1$

$|x - 3| = 1$

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, x \in [3, +\infty) \cap [2, +\infty) = [3, +\infty) \\ 3 - x, x \in (-\infty, 3) \cap [2, +\infty) = [2,3) \end{cases}$$

Cazul 1.2.1 $x \in [3, +\infty)$

$x - 3 = 1$

$x = 4 \in [3, +\infty)$ este soluție a ecuației inițiale

Cazul 1.2.2 $x \in [2,3)$

$3 - x = 1$

$x = 2 \in [2,3)$ este soluție a ecuației inițiale

Cazul 2. $x \in (-\infty, 1)$

Ecuația devine:

$\big||1 - x - 1| - 1\big| = 1$

$\big||x| - 1\big| = 1$

$$|x| = \begin{cases} x, x \in [0, +\infty) \cap (-\infty, 1) = [0,1) \\ -x, x \in (-\infty, 0) \cap (-\infty, 1) = (-\infty, 0) \end{cases}$$

Cazul 2.1. $x \in (-\infty, 0)$

$|-x-1| = 1$

$|-x-1| = \begin{cases} -x-1, x \in (-\infty,-1] \cap (-\infty,0) = (-\infty,-1] \\ x+1, x \in (-1,+\infty) \cap (-\infty,0) = (-1,0) \end{cases}$

Cazul 2.1.1 $x \in (-\infty,-1]$

$-x-1 = 1$

$x = -2 \in (-\infty,-1]$ este soluție a ecuației inițiale

Cazul 2.1.2 $x \in (-1,0)$

$x + 1 = 1$

$x = 0 \notin (-1,0)$

Cazul 2.2. $x \in [0,1)$

$|x-1| = 1$

Dar $|x-1| = 1-x, (\forall)x \in [0,1)$

Ecuația devine:

$1 - x = 1$

$x = 0 \in [0,1)$ este soluție a ecuației inițiale

Prin urmare, mulțimea soluțiilor ecuației inițiale este S = {-2, 0, 2, 4} și ecuația are patru soluții reale.

Răspuns corect: $\boxed{c}$.

18. Fie polinomul $f = X(X+1)^{2n+1} + (m-1)X^n$, unde $n \geq 3$ este un număr natural, iar $m \in \mathbb{C}$. Să se determine m astfel încât f să fie divizibil cu $X^2 + X + 1$.

a) $m = -2$; b) $m = 2i$; c) $m = 18$; d) $m = 2$; e) $m = 4$; f) $m = -2i$.

Fie $g(X) = X^2 + X + 1$ și în situația în care polinomul f este divizibil cu polinomul g, atunci are loc expresia:

$f(X) = g(X)h(X)$

Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $g(x) = 0$: $g(x_1) = 0$ și $g(x_2) = 0$.

Prin urmare, au loc egalitatea:

$f(x_1) = g(x_1)h(x_1) = 0$

$f(x_2) = g(x_2)h(x_2) = 0$

Se determină valorile x_1 și x_2, soluțiile ecuației de gradul al doilea $x^2 + x + 1 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

de unde

$$x_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Se obține valoarea m din egalitățile $f(x_1) = 0$ și $f(x_2) = 0$.

Cazul 1. $x_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

$$f(x_1) = f\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} + 1\right)^{2n+1} + (m-1)\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^{n}$$
$$= \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^{2n+1} + (m-1)\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^{n}$$

Fie numerele complexe $z_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ce vor fi puse sub formă trigonometrică.

Ambele numere complexe au modulul 1:

$$r_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$r_2 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

Se determină unghiurile corespunzătoare expresiei sub formă trigonometrică:

$$\varphi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{3}$$

$$\varphi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{4\pi}{3}$$

Astfel, se obține:

$$f(x_1)=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)^{2n+1}+(m-1)\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{n}$$

$$=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left[\cos(2n+1)\frac{5\pi}{3}+i\sin(2n+1)\frac{5\pi}{3}\right]+(m-1)\left(\cos\frac{4n\pi}{3}+i\sin\frac{4n\pi}{3}\right)$$

Pentru $n = 0$, se obține:

$$f(x_1)=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)+(m-1)(\cos 0+i\sin 0)$$

$$=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)+m-1$$

$$=-\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}+i^2\frac{3}{4}+m-1=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+m-1=m-2$$

Dar $f(x_1) = 0$ adică $m - 2 = 0$, de unde $m = 2$.

Pentru $n = 1$, se obține:

$$f(x_1)=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{15\pi}{3}+i\sin\frac{15\pi}{3}\right)+(m-1)\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)(\cos\pi+i\sin\pi)+(m-1)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)(m-2)$$

Dar $f(x_1) = 0$ adică $m - 2 = 0$, de unde $m = 2$.

Pentru $n = 2$, se obține:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{25\pi}{3}+i\sin\frac{25\pi}{3}\right)+(m-1)\left(\cos\frac{8\pi}{3}+i\sin\frac{8\pi}{3}\right) \\ &= \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)+(m-1)\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)+(m-1)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}-i^2\frac{3}{4}+(m-1)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+(m-1)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1-m+1}{2}+i\sqrt{3}\left(\frac{m-1-1}{2}\right) \\ &= \frac{2-m}{2}+i\sqrt{3}\frac{m-2}{2} \end{aligned}$$

Dar $f(x_1) = 0$ și din egalarea părții reale și a părții imaginare cu 0 se obține că $m - 2 = 0$, de unde $m = 2$.

Pentru $n = 3$, se obține:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{35\pi}{3}+i\sin\frac{35\pi}{3}\right)+(m-1)\left(\cos\frac{12\pi}{3}+i\sin\frac{12\pi}{3}\right) \\ &= \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)+(m-1)(\cos 0+i\sin 0) \\ &= \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)+m-1 \\ &= -\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}+i^2\frac{3}{4}+m-1=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+m-1=m-2 \end{aligned}$$

Dar $f(x_1) = 0$ adică $m - 2 = 0$, de unde $m = 2$.

Se observă că datorită periodicității funcțiilor trigonometrice (cu 2π), cazurile posibile pentru valori ale lui n se reduc la cele descrise mai sus. Pentru toate acestea, egalitatea $f(x_1) = 0$ se reduce la $m = 2$.

Cazul 2. $x_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+1\right)^{2n+1}+(m-1)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2n+1}+(m-1)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Fie numerele complexe $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ce vor fi puse sub formă trigonometrică.

Ambele numere complexe au modulul 1:

$$r_1 = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$r_2 = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

Se determină unghiurile corespunzătoare expresiei sub formă trigonometrică:

$$\varphi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\varphi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$$

Astfel, se obține:

$$\begin{aligned} f(x_2) &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1} + (m-1)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n \\ &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left[\cos(2n+1)\frac{\pi}{3} + i\sin(2n+1)\frac{\pi}{3}\right] + (m \\ &\quad - 1)\left(\cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Pentru $n = 0$, se obține:

$$\begin{aligned} f(x_2) &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) + (m-1)(\cos 0 + i\sin 0) \\ &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) + m - 1 \\ &= -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} + i^2\frac{3}{4} + m - 1 = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + m - 1 = m - 2 \end{aligned}$$

Dar $f(x_2) = 0$ adică $m - 2 = 0$, de unde $m = 2$.

Pentru n = 2, se obține:

$$
\begin{aligned}
f(x_2) &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi}{3}\right)+(m-1)\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\
&= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)(\cos\pi+i\sin\pi)+(m-1)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)(m-2)
\end{aligned}
$$

Dar $f(x_2) = 0$ adică $m - 2 = 0$, de unde $m = 2$.

Pentru n = 2, se obține:

$$
\begin{aligned}
f(x_2) &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)+(m-1)\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\\
&= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)+(m-1)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= -\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}-i^2\frac{3}{4}+(m-1)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+(m-1)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1-m+1}{2}+i\sqrt{3}\left(\frac{1-m+1}{2}\right)\\
&= \frac{2-m}{2}+i\sqrt{3}\frac{2-m}{2}
\end{aligned}
$$

Dar $f(x_2) = 0$ și din egalarea părții reale și a părții imaginare cu 0 se obține că $m - 2 = 0$, de unde $m = 2$.

Pentru n = 3, se obține:

$$
\begin{aligned}
f(x_2) &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{7\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi}{3}\right)+(m-1)\left(\cos\frac{6\pi}{3}+i\sin\frac{6\pi}{3}\right)\\
&= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)+(m-1)(\cos 0+i\sin 0)\\
&= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)+m-1\\
&= -\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}+i^2\frac{3}{4}+m-1=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+m-1=m-2
\end{aligned}
$$

Dar $f(x_2) = 0$ adică $m - 2 = 0$, de unde $m = 2$.

Se observă că datorită periodicității funcțiilor trigonometrice (cu 2π), cazurile posibile pentru valori ale lui n se reduc la cele descrise mai sus. Pentru toate acestea, egalitatea $f(x_2) = 0$ se reduce la $m = 2$.

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{d}}$.

REZOLVAREA SUBIECTELOR PROPUSE
LA PROBA DE ALGEBRĂ ŞI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ – VARIANTA B –
LA EXAMENUL DE ADMITERE
ÎN UNIVERSITATEA POLITEHNICA BUCUREŞTI
2015

www.andreirosucojocaru.ro

Varianta / Întrebare	a	b	c	d	e	f
1				■		
2	■					
3	■					
4	■					
5				■		
6				■		
7						■
8					■	
9		■				
10	■					
11		■				
12	■					
13		■				
14			■			
15				■		
16			■			
17			■			
18				■		