REZOLVAREA SUBIECTELOR PROPUSE
LA PROBA DE MATEMATICĂ – E.c) –
SPECIALIZAREA MATEMATICĂ-INFORMATICĂ
LA EXAMENUL DE BACALAUREAT NAŢIONAL
1 IULIE 2015

SUBIECTUL I

1. Se aplică formula binomului la pătrat $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ și se obține:

$$\left(\sqrt{5}+1\right)^2 + \left(\sqrt{5}-1\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\sqrt{5} + 1^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 - 2\sqrt{5} + 1^2$$
$= 5 + 2\sqrt{5} + 1 + 5 - 2\sqrt{5} + 1 = \mathbf{12}$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

2. Se calculează valoarile funcției $f(x)$ în punctele $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ pentru ca ulterior să se calculeze produsul acestora:

$f(1) = 1 - 3 = -2$
$f(2) = 2 - 3 = -1$
$f(3) = 3 - 3 = 0$
$f(4) = 4 - 3 = 1$

Întrucât unul dintre factorii produsului este nul, rezultă că $\boldsymbol{f(1)f(2)f(3)f(4) = 0}$.

3. $\log_2(x^2 - 4x + 4) = 0$ se mai poate scrie $x^2 - 4x + 4 = 2^0$ adică $x^2 - 4x + 4 = 1$ și încă $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Rezolvând ecuația de gradul al doilea se obține:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$

de unde:

$$x_1 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$
$$x_2 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Mulțimea soluțiilor ecuației este **S = {1, 3}**.

4. Numerele naturale impare de trei cifre distincte au forma $\overline{abc}$, unde c ∤ 2.

Cum dintre cifrele 2, 3, 4 numai 3 îndeplinește această condiție, rezultă că $c = 3$, iar cifrele a și b pot avea orice valoare din mulțimea {2, 4} cu condiția ca $a \neq b$.

Astfel, se obțin două situații valide:

a) $a = 2$, $b = 4$, iar numărul este 243;
b) $a = 4$, $b = 2$, iar numărul este 423.

Rezultă că există doar **2** numere naturale impare de trei cifre distincte care se pot forma cu cifrele mulțimii {2, 3, 4}.

5. Ecuația dreptei *d* care trece prin punctul $A(x_A, y_A)$ și este perpendiculară pe dreapta *AB* are ecuația:

$$y - y_A = -\frac{1}{m_{AB}}(x - x_A)$$

unde:

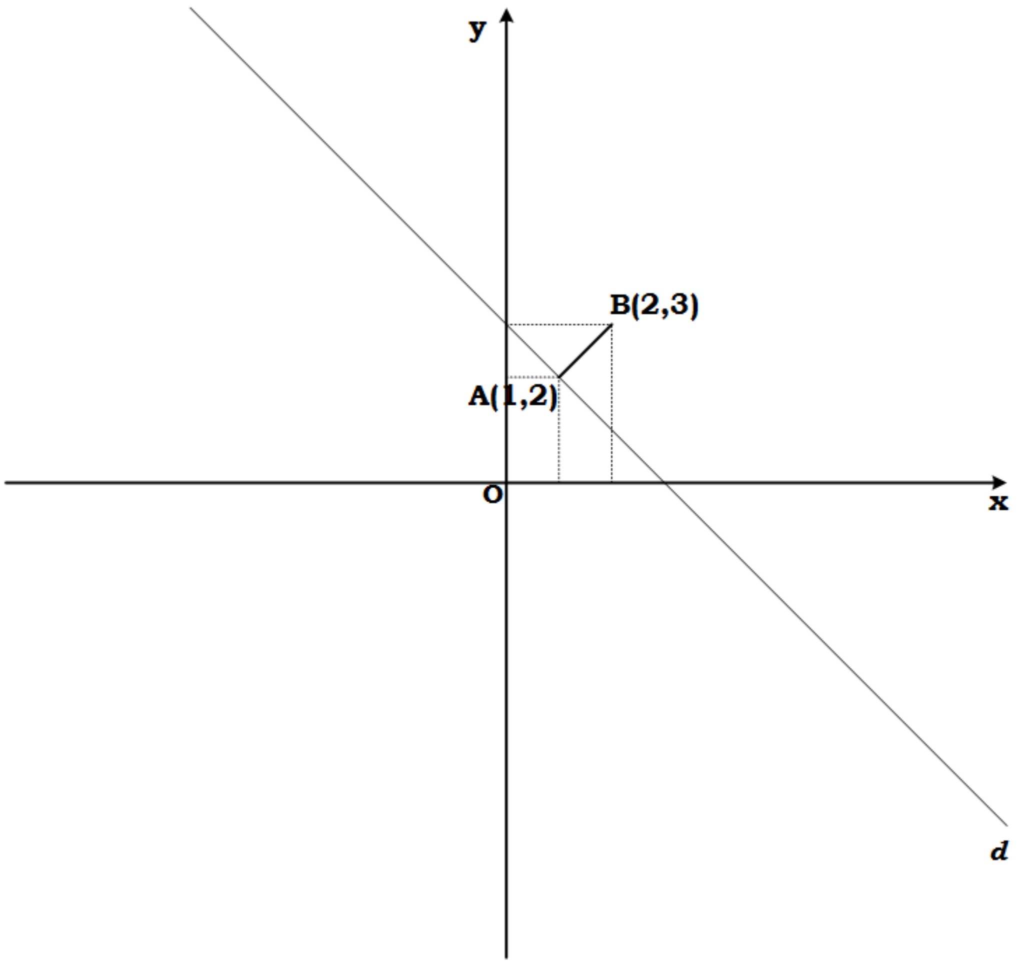
$x_A = 1$
$y_A = 2$
$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-2}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$

Înlocuind valorile în expresia ecuației dreptei, obținem:

$y - 2 = -1(x - 1) = -x + 1$

sau încă:

$\boldsymbol{y = -x + 3}$



6. Se aplică formulele

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Înlocuind, obținem:

$$\sin(\pi - x) = \sin \pi \cos x - \sin x \cos \pi$$
$$\sin(\pi + x) = \sin \pi \cos x + \sin x \cos \pi$$

De pe cercul trigonometric se cunoaște faptul că: $\sin \pi = 0$ și $\cos \pi = -1$ și înlocuind în expresiile de mai sus se obține:

$$\sin(\pi - x) = -\sin x \cdot (-1) = \sin x$$
$$\sin(\pi + x) = \sin x \cdot (-1) = -\sin x$$

Prin urmare, $\sin(\pi - x) + \sin(\pi + x) = \sin x - \sin x = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

SUBIECTUL al II-lea

1.

a) Se determină inițial $B(0)$ pentru ca ulterior să se calculeze determinantul acesteia:

$$B(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 \cdot 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Se obține că $\det(B(0)) = \det(I_3) = 1$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

b) $$B(x) + B(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 3y & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & x+y \\ 0 & 2 & 0 \\ 3x+3y & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & x+y \\ 0 & 2 & 0 \\ 3(x+y) & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \cdot \frac{x+y}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 \cdot \frac{3(x+y)}{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{x+y}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 \cdot \frac{x+y}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2B\left(\frac{x+y}{2}\right),$$
adică ceea ce trebuia demonstrat.

c) Se cere să se rezolve ecuația matriceală: $B(x^2+1)B(x) = B(x^2+x+1)$.

Se determină membrii acestei ecuații, plecând de la faptul cunoscut că

$$B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B(x^2+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^2+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3(x^2+1) & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^2+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x^2+3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B(x^2+x+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^2+x+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3(x^2+x+1) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^2+x+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x^2+3x+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se realizează înmulțirile:

$$B(x^2+1)B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^2+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x^2+3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1+0+3x(x^2+1) & 0 & x+x^2+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x^2+3+3x & 0 & (3x^2+3)x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^3+3x+1 & 0 & x^2+x+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x^2+3x+1 & 0 & 3x^3+3x+1 \end{pmatrix}$$

Egalând membrii ecuației se obține:

$$B(x^2+1)B(x) = B(x^2+x+1)$$

$$\begin{pmatrix} 3x^3+3x+1 & 0 & x^2+x+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x^2+3x+1 & 0 & 3x^3+3x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^2+x+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x^2+3x+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Identificând expresiile care se găsesc pe aceleași poziții în cadrul matricelor vom avea:

$3x^3 + 3x + 1 = 1$
$3x^3 + 3x = 0$
$3x(x^2 + 1) = 0$
$x = 0$

Mulțimea soluțiilor reale a ecuației matriceale $B(x^2+1)B(x) = B(x^2+x+1)$ este așadar **S = { 0 }**.

2.

a) Înlocuind valorile date în expresia legii de compoziție se obține:

$$(-3)°3 = \frac{1}{2}(-3-3)(3-3)+3 = \frac{1}{2}\cdot(-6)\cdot 0+3 = 3,$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

b) Se cere să se rezolve ecuația $n°n = 11$ în mulțimea numerelor naturale.

$$n°n = \frac{1}{2}(n-3)(n-3) + 3 = \frac{1}{2}(n^2 - 6n + 9) + 3 = \frac{n^2}{2} - 3n + \frac{9}{2} + 3 = \frac{n^2}{2} - 3n + \frac{15}{2}$$

Egalând termenii ecuației obținem:

$$\frac{n^2}{2} - 3n + \frac{15}{2} = 11$$

Înmulțind cu 2 ambele părți ale egalității obținem:

$n^2 - 6n + 15 = 22$
$n^2 - 6n - 7 = 0$

Rezolvând ecuația de gradul al doilea se obține:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 36 + 28 = 64$
$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2}$

de unde:

$$n_1 = \frac{6-8}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \notin \mathbf{N}$$
$$n_2 = \frac{6+8}{2} = \frac{14}{2} = 7 \in \mathbf{N}$$

Mulțimea soluțiilor ecuației în mulțimea numerelor naturale este **S = {7}**.

c) Se demonstrează faptul că legea de compoziție este asociativă, așa cum se afirmă de fapt și în enunț:

$$(x°y)°z = \frac{1}{2}(x°y - 3)(z-3) + 3 = \frac{1}{2}(x°y \cdot z - 3x°y - 3z + 9) + 3 =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{2}(x-3)(y-3) + 3\right]z - 3\left[\frac{1}{2}(x-3)(y-3) + 3\right] - 3z + 9\right\}$$
$$= \frac{1}{4}(x-3)(y-3)z + \frac{3}{2}z - \frac{3}{4}(x-3)(y-3) - \frac{9}{2} - \frac{3}{2}z + \frac{9}{2} + 3$$
$$= \frac{1}{4}(x-3)(y-3)(z-3) + 3 = \frac{1}{2}(x-3)\frac{1}{2}(y-3)(z-3) + 3$$
$$= \frac{1}{2}(x-3)\left[\frac{1}{2}(y-3)(z-3) + 3 - 3\right] + 3 = \frac{1}{2}(x-3)(y°z - 3) + 3 = x°(y°z)$$

Întrucât legea de compoziție este asociativă, valoarea $1°2°3° \dots °2015$ se poate calcula astfel $\left(\left((1°2)°3\right)° \dots\right)°2015$.

Astfel, se calculează:

$$1°2 = \frac{1}{2}(1-3)(2-3) + 3 = \frac{1}{2}(-2)(-1) + 3 = 1 + 3 = 4$$

$$1°2°3 = (1°2)°3 = 4°3 = \frac{1}{2}(4-3)(3-3) + 3 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 + 3 = 3$$
$$1°2°3°4 = (1°2°3)°4 = 3°4 = \frac{1}{2}(3-3)(4-3) + 3 = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 + 3 = 3$$

Astfel, se observă că pentru orice $n \geq 3$, $1°2° \ldots °n = 3$.

Se demonstrează prin inducție matematică acest lucru:
Presupunem că $1°2° \ldots °n = 3, \forall n \geq 3$. Atunci trebuie să demonstrăm că $1°2° \ldots °n°(n+1) = 3$.

$$1°2° \ldots °n°(n+1) = (1°2° \ldots °n)°(n+1) = 3°(n+1) = \frac{1}{2}(3-3)(n+1-3) + 3$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (n-2) + 3 = 3$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.
Prin urmare, $1°2°3° \ldots °2015 = 3$.

SUBIECTUL al III-lea

1.

a) Se aplică formula de derivare pentru funcțiile exprimate sub formă de fracție:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$
$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

unde:

$u(x) = x + 2$, deci $u'(x) = 1$
$v(x) = x - 1$, deci $v'(x) = 1$

Înlocuind în formulă aceste valori, obținem:

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x - 1 - x - 2}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{-3}{(x-1)^2} = -\frac{3}{(x-1)^2}$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

b) A demonstra că funcția f este convexă pe intervalul $(1, +\infty)$ este echivalent cu a arăta că $f''(x) > 0$, $\forall x \in (1, +\infty)$.

Se aplică aceeași formulă ca mai sus, dar în care:
$u(x) = -3$, deci $u'(x) = 0$
$v(x) = (x-1)^2$, deci $v'(x) = 2(x-1)$

Înlocuind în formulă aceste valori, obținem:

$$f''(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{0 \cdot 2(x-1) - (-3) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{6(x-1)}{(x-1)^4}$$
$$= \frac{6}{(x-1)^3}$$

Studiind semnul derivatei de ordinul al doilea al funcției f obținem:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$	0	$+$ $+$ $+$ $+$ $+$
$(x-1)^3$	$-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$	0	$+$ $+$ $+$ $+$ $+$
$f''(x)$	0 $-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-\infty$		$-\infty$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ 0
$f(x)$	concav		convex

$f''(x) > 0$
$(x-1)^3 > 0$
$x - 1 > 0$
$x > 1$, adică $x \in (1, +\infty)$, deci ceea ce trebuia demonstrat.

c) Fie punctul cerut $A(x_A, y_A)$.

Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul A este $y - y_A = f'(x_A)(x - x_A)$ unde $f'(x_A)$ reprezintă panta tangentei în punctul A. Întrucât tangenta este paralelă cu dreapta de ecuație $y = -3x$, înseamnă că cele două drepte vor avea aceeași pantă.

Panta dreptei $y = -3x$ adică $3x + y = 0$ (scrisă sub forma $ax + by + c = 0$) este $m = -\frac{a}{b} = -3$. Prin urmare, rezultă că $f'(x_A) = m = -3$.

Se cunoaște că $f'(x_A) = -\frac{3}{(x_A-1)^2}$ de unde, prin înlocuire, se obține că:

$$-\frac{3}{(x_A-1)^2} = -3$$
$$(x_A - 1)^2 = 1$$
$$x_A^2 - 2x_A + 1 = 1$$
$$x_A^2 - 2x_A = 0$$
$$x_A(x_A - 2) = 0$$

de unde:

$x_{A1} = 0$ și $x_{A2} = 2$.

Punctul $x_{A1} = 0$ nu face parte din domeniul de definiție al funcției $x \in (1, +\infty)$.

Pentru $x_{A2} = 2$ se obține $y_{A2} = 4$ și ecuația tangentei este $y - 4 = -3(x - 2)$ adică $y - 4 = -3x + 6$ sau încă $y = -3x + 10$.

Prin urmare, punctul căutat este **A(2, 4)**.

2.

a) Se cere să se calculeze valoarea expresiei $\int_1^2 \frac{1}{x} f(x)dx$.

$$\int_1^2 \frac{1}{x} f(x)dx = \int_1^2 \frac{1}{x} xe^x dx = \int_1^2 e^x dx = e^x \Big|_1^2 = e^2 - e = e(e-1)$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

b) Se calculează mai întâi $F(x)$ după care se determină constanta C din expresia acesteia folosind constrângerea $F(1) = 0$.

Calculul primitivei $F(x)$ se face folosind integrarea prin părți:

$$F(x) = \int f(x)dx = \int xe^x dx = \int x(e^x)'dx = xe^x - \int x'e^x dx = xe^x - \int e^x dx$$
$$= xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

Se pune condiția ca $F(1) = 0$ de unde
$F(1) = e^1(1 - 1) + \mathrm{C} = e \cdot 0 + \mathrm{C} = \mathrm{C}$
de unde
C = 0

Se obține că $\boldsymbol{F(x) = e^x(x - 1)}$.

c) Se calculează valoarea expresiei I_n, pentru orice valoare $n \geq 2$.

$$I_n = \int_0^1 x^n f(x)dx = \int_0^1 x^n \cdot xe^x dx = \int_0^1 x^{n+1}e^x dx = \int_0^1 x^{n+1}(e^x)'dx$$
$$= x^{n+1}e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n e^x dx$$
$$= 1^{n+1} \cdot e^1 - 0^{n+1} \cdot e^0 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x dx$$
$$= e - (n+1)\int_0^1 x^{n-1} \cdot xe^x dx = e - (n+1)\int_0^1 x^{n-1} f(x)dx$$
$$= e - (n+1)I_{n-1}$$

Astfel, se obține că $I_n + (n + 1)I_{n-1} = e$, pentru orice valoare $n \geq 2$.