REZOLVAREA SUBIECTELOR PROPUSE
LA PROBA DE MATEMATICĂ – E. c) –
SPECIALIZAREA MATEMATICĂ-INFORMATICĂ
LA EXAMENUL DE BACALAUREAT NAŢIONAL
27 AUGUST 2014

SUBIECTUL I

1. Se aduce numărul complex z la forma $z = a + ib$, unde a reprezintă partea reală, iar b partea imaginară, ţinându-se cont de faptul că $i^2 = -1$.

$z = 1 + 2i + 3i^2 = 1 + 2i + 3(-1) = 1 + 2i - 3 = -2 + 2i$.

Prin urmare, partea reală a numărului complex z este –2.

2. Punctul de intersecţie dintre graficele funcţiilor $f(x)$ şi $g(x)$ este acel punct (x_0, y_0) pentru care $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$.

$f(x_0) = g(x_0)$

$x_0 - 1 = 3x_0 - 5$

$2x_0 = 4$

$x_0 = 2$

de unde

$y_0 = f(2) = 2 - 1 = 1$

Se poate verifica şi că

$y_0 = g(2) = 3\cdot 2 - 5 = 6 - 5 = 1$.

Prin urmare, coordonatele punctului de intersecţie dintre graficele funcţiilor $f(x)$ şi $g(x)$ sunt (2, 1).

3. Se ţine cont de faptul că funcţia exponenţială este bijectivă, astfel încât o ecuaţie de tipul $a^{u(x)} = a^{v(x)}$ este echivalentă cu $u(x) = v(x)$.

Astfel,

$3^{x^2-x} = 3^{2x}$

se mai poate scrie:

$x^2 - x = 2x$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x - 3) = 0$

de unde $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, ambele soluţii satisfăcând ecuaţia iniţială.

Astfel, mulţimea soluţiilor ecuaţiei este S = {0, 3}.

4. Numerele pare, de 2 cifre, care se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3 sunt 10, 12, 20, 22, 30, 32, aşadar, 6 numere.

5. Ecuaţia $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ implică realizarea identificării dintre scalarii vectorilor unitate $\vec{i}$ şi $\vec{j}$.

$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

$(m + 1)\vec{i} + 4\vec{j} = 2(3\vec{i} + 2\vec{j})$

$(m + 1)\vec{i} + 4\vec{j} = 6\vec{i} + 4\vec{j}$

de unde

$m + 1 = 6$
$m = 5$

6.

Soluţia 1. Se scrie teorema cosinusului în triunghiul ABC, potrivit căreia

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC BC \cos C$$

De aici se determină $\cos C$ ca fiind:

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2ACBC}$$

Înlocuind, obţinem:

$$\cos C = \frac{3^2 + (3\sqrt{2})^2 - 3^2}{2 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Soluţia 2. Se observă că triunghiul ABC este nu numai isoscel ci şi dreptunghic (întrucât $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2AB^2$ sau mai simplu $BC = AB\sqrt{2}$), iar într-un astfel de triunghi particular $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = \frac{\pi}{4}$, fiind cunoscut faptul că $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

1.

a) Determinăm mai întâi, prin substituţia $x = 0$, $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

Det(A(0)) = det(I_3) = 1.

Determinatul se poate calcula şi manual:

$$det(A(0)) = det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 - (0 \cdot 1 - 0 \cdot 0) + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 1 - 0 - (0 - 0) + 0 - 0 = 1$$

b) Se determină, prin substituţie $A(x+y)$ calculându-se $A(x) \cdot A(y)$ şi verificându-se dacă se respectă egalitatea din enunţ.

$$A(x+y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 \\ 2(x+y)^2 - 2(x+y) & 4(x+y) & 1 \end{pmatrix}$$
$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 2x^2 - 2x & 4x & 1 \end{pmatrix}$$
$$A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ 2y^2 - 2y & 4y & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 2x^2-2x & 4x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ 2y^2-2y & 4y & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 1+0\cdot y+0\cdot(2y^2-2y) & 1\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 4y & 1\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 1 \\ x\cdot 1+1\cdot y+0\cdot(2y^2-2y) & x\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 4y & x\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot 1 \\ (2x^2-2x)\cdot 1+4x\cdot y+1\cdot(2y^2-2y) & (2x^2-2x)\cdot 0+4x\cdot 1+1\cdot 4y & (2x^2-2x)\cdot 0+4x\cdot 0+1\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ x+y+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ 2x^2-2x+4xy+2y^2-2y & 0+4x+4y & 0+0+1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 \\ 2(x^2+2xy+y^2)-2(x+y) & 4x+4y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 \\ 2(x+y)^2-2(x+y) & 4(x+y) & 1 \end{pmatrix}$$

Se observă lesne că, pentru $(\forall)x, y \in \boldsymbol{R}$, se respectă egalitatea: $A(x+y)=A(x)\cdot A(y)$.

c) Se determină prin substituţie $A(x^2+2)$, iar pentru calcularea produsului $A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)$ se foloseşte relaţia de mai sus, necunoscuta x obţinându-se prin egalarea termenilor care se găsesc pe aceeaşi poziţie.

$$A(x^2+2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2+2 & 1 & 0 \\ 2(x^2+2)^2-2(x^2+2) & 4(x^2+2) & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2+2 & 1 & 0 \\ 2(x^4+4x^2+4)-2x^2-4 & 4x^2+8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2+2 & 1 & 0 \\ 2x^4+8x^2+8-2x^2-4 & 4x^2+8 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2+2 & 1 & 0 \\ 2x^4+6x^2+4 & 4x^2+8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(x)\cdot A(x)\cdot A(x) = A(x+x)\cdot A(x) = A(x+x+x) = A(3x) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3x & 1 & 0 \\ 2(3x)^2-2\cdot 3x & 4\cdot 3x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3x & 1 & 0 \\ 2\cdot 9x^2-6x & 12x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3x & 1 & 0 \\ 18x^2-6x & 12x & 1 \end{pmatrix}$$

Prin egalarea termenilor care se găsesc pe aceleaşi poziţii se obţine următorul sistem de trei ecuaţii cu o necunoscută:

$$\begin{cases} x^2+2 = 3x \\ 2x^4+6x^2+4 = 18x^2-6x \\ 4x^2+8 = 12x \end{cases}$$

care, prin simplificare, se reduc la:

$$\begin{cases} x^2-3x+2 = 0 \\ 2x^4-12x^2+6x+4 = 0 \end{cases}$$

Valori valide pentru x sunt cele care sunt soluţii pentru ambele ecuaţii.

Ecuaţia $x^2 - 3x + 2 = 0$ se rezolvă folosind formula pentru ecuaţii de gradul al doilea:

$$x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{3\pm 1}{2}$$

de unde

$x_1 = 1$ şi $x_2 = 2$.

Verificăm acum care dintre aceste soluţii verifică şi cea de-a doua ecuaţie şi anume $2x^4 - 12x^2 + 6x + 4 = 0$.

X_1: $2x_1^4 - 12x_1^2 + 6x_1 + 4 = 2 \cdot 1^4 - 12 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 4 = 2 \cdot 1 - 12 \cdot 1 + 6 + 4$
$= 2 - 12 + 6 + 4 = 0$, aşadar $x_1 = 1$ reprezintă o valoare pentru care e adevărată egalitatea din enunţ

x_2: $2x_2^4 - 12x_2^2 + 6x_2 + 4 = 2 \cdot 2^4 - 12 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 4 = 2 \cdot 16 - 12 \cdot 4 + 12 + 4$
$= 32 - 48 + 12 + 4 = 0$, aşadar $x_2 = 2$ reprezintă o valoare pentru care e adevărată egalitatea din enunţ

Mulţimea soluţiilor valorilor căutate este S = {1, 2}.

2.

a) Valoarea lui $f(2)$ se obţine prin substituţia lui X cu 2 în expresia polinomului:

$f(2) = 2^3 - 3\cdot 2^2 + 2\cdot a - 2 = 8 - 3\cdot 4 + 2a - 2 = 8 - 12 + 2a - 2 = 2a - 6 = 2(a - 3)$

b) Dacă polinomul $f(X)$ este divizibil prin $X^2 - X + 1$, înseamnă că restul împărţirii lui $f(X)$ la $X^2 - X + 1$ trebuie să fie zero.

$$
\begin{array}{rrr|l}
X^3 - 3X^2 & & + aX - 2 & X^2 - X + 1 \\
\hline
-X^3 + X^2 & & - X & X - 2 \\
\cline{1-3}
 & -2X^2 + (a-1)X - 2 & & \\
 & 2X^2 & -2X + 2 & \\
\cline{2-3}
 & (a-3)X & &
\end{array}
$$

Se observă că prin împărţire polinomului $f(X) = X^3 - 3X^2 + aX - 2$ la $X^2 - X + 1$ se obţine câtul $c(X) = X - 2$ şi restul $r(X) = (a - 3)X$.

Criterului de divizibilitate al lui $f(X)$ prin $X^2 - X + 1$ impune ca $r(X) = 0$, cu alte cuvinte $(a - 3)X = 0$, de unde $a = 3$.

Ca atare, expresia polinomului este $f(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$.

c) Pentru $a = 3$, expresia polinomului este $f(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$ sau, ţinând cont de rezultatul obţinut anterior $f(X) = (X - 2)(X^2 - X + 1)$.

Pentru a rezolva ecuaţia $f(2^x) = 0$, substituim în expresia de mai sus pe X cu 2^x şi avem:

$(2^x - 2)(2^{2x} - 2^x + 1) = 0$

obţinându-se două ecuaţii:

(1) $2^x - 2 = 0$
(2) $2^{2x} - 2^x + 1 = 0$

Pentru ecuaţia (1) $2^x = 2$, ţinând cont de proprietatea funcţiei exponenţiale de a fi bijectivă se obţine ca soluţie $x = 1$.

Pentru ecuaţia (2) $2^{2x} - 2^x + 1 = 0$, notăm $2^x = y$ şi se obţine ecuaţia $y^2 - y + 1 = 0$ care nu are însă soluţii reale, discriminantul fiind negativ $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$.

Prin urmare, mulţimea soluţiilor ecuaţiei $f(2^x) = 0$ din mulţimea numerelor reale este S = {1}.

SUBIECTUL al III-lea

1.

a) Funcţia $f(x)$ are forma $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, unde $u(x) = xe^x$, iar $v(x) = x + 2$, prin urmare formula de derivare care trebuie aplicată în cazul acesteia este $f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}$.

$u'(x) = e^x + xe^x$
$v'(x) = 1$

Înlocuind în formula de mai sus, obţinem:

$f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)} = \frac{(e^x+xe^x)(x+2)-1\cdot xe^x}{(x+2)^2} = \frac{xe^x+2e^x+x^2e^x+2xe^x-xe^x}{(x+2)^2} = \frac{x^2e^x+2xe^x+2e^x}{(x+2)^2} = \frac{e^x(x^2+2x+2)}{(x+2)^2}$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

b) Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 0$ este dată de formula:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

sau, înlocuind pe $x_0=0$:

$$y - f(0) = xf'(0)$$

Dar

$f(0) = 0$

$f'(0) = \frac{e^0(0^2+2\cdot 0+2)}{(0+2)^2} = \frac{1\cdot(0+0+2)}{2^2} = \frac{1\cdot 2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Aşadar, ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 0$ este

$$y = \frac{1}{2}x$$

sau

$x - 2y = 0$.

c) Ecuaţia $f(x) = 1$ se mai poate scrie $\frac{xe^x}{x+2} = 1$, adică $\frac{xe^x}{x+2} - 1 = 0$ sau încă $\frac{xe^x-(x+2)}{x+2} = 0$, adică $\frac{x(e^x-1)-2}{x+2} = 0$

Pentru a determina dacă ecuaţia are vreo soluţie în intervalul $(1, 2)$ ne propunem să studiem monotonia funcţiei $g(x) = \frac{x(e^x-1)-2}{x+2}$ pe acest interval.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x(e^x-1)-2}{x+2} = \frac{e-3}{3} = \frac{e}{3} - 1 < 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x(e^x-1)-2}{x+2} = \frac{2e^2-4}{4} = \frac{e^2}{2} - 1 > 0$$

Se observă că şi funcţia $g(x)$ are forma $g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, unde $u(x) = x(e^x - 1) - 2$, iar $v(x) = x + 2$, prin urmare se poate aplica formula de derivare $g'(x) = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}$.

$u'(x) = e^x - 1 + xe^x$
$v'(x) = 1$

Înlocuind în formula de mai sus, obţinem:

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)} = \frac{(e^x - 1 + xe^x)(x+2) - 1[x(e^x - 1) - 2]}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{xe^x + 2e^x - x - 2 + x^2e^x + 2xe^x - xe^x + x + 2}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{x^2e^x + 2xe^x + 2e^x}{(x+2)^2} = \frac{e^x(x^2 + 2x + 2)}{(x+2)^2}$$

Pe intervalul (1, 2) avem că $e^x > 0$, $x^2 + 2x + 2 > 0$ (căci discriminantul ecuaţiei de gradul al doilea asociat este negativ $\Delta = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 4 - 8 = -4 < 0$) şi $(x + 2)^2 > 0$, prin urmare $g'(x) > 0$, $(\forall) x \in (1,2)$.

Funcţia $g(x)$ fiind strict crescătoare pe intervalul dat şi limitele laterale în cele două puncte extreme fiind negativă respectiv pozitivă, rezultă că există un punct unic $x_0 \in (1,2)$ pentru care $g(x_0) = 0$, acesta fiind soluţia ecuaţiei iniţiale.

2.

a) Se înlocuieşte $n = 1$ în ecuaţia iniţială şi se obţine

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{1+x-1}{1+x}dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$
$$= x\Big|_0^1 - ln(1+x)\Big|_0^1 = (1-0) - [ln(1+1) - ln(1+0)]$$
$$= 1 - (ln2 - ln1) = 1 - ln2$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

b) Se cere să se demonstreze că $I_{n+1} \leq I_n$, adică $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

Explicitând relaţia, obţinem:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}}dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}} - \frac{x^n}{1+x^n}\right)dx$$
$$= \int_0^1 x^n \left(\frac{x}{1+x^{n+1}} - \frac{1}{1+x^n}\right)dx$$
$$= \int_0^1 x^n \left[\frac{x(1+x^n)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} - \frac{1+x^{n+1}}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}\right]dx$$
$$= \int_0^1 x^n \frac{x(1+x^n) - (1+x^{n+1})}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}dx = \int_0^1 x^n \frac{x + x^{n+1} - 1 - x^{n+1}}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}dx \leq 0$$

Inegalitatea este lesne de justificat, de vreme ce pe intervalul [0, 1] pe care este definită avem $x^n \geq 0$, $x - 1 \leq 0$, $1 + x^n \geq 0$ şi $1 + x^{n+1} \geq 0$.

c) Limita poate fi calculată folosind teorema “cleştelui”, pornind de la inegalitatea:

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$$

Integrând, de la 0 la 1 această inegalitate, obţinem:

$$\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx$$

adică

$$0 \leq I_n \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1$$

$$0 \leq I_n \leq \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1}$$

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Aplicând limita pentru $n \to \infty$ pe această inegalitate avem:

$$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} I_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}$$

adică

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} I_n \leq 0$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$