REZOLVAREA SUBIECTELOR PROPUSE LA PROBA DE MATEMATICĂ – E.c) – SPECIALIZAREA MATEMATICĂ-INFORMATICĂ LA EXAMENUL DE BACALAUREAT NAŢIONAL 2 IULIE 2014

SUBIECTUL I

1. Suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice este: $S = a_1 + a_2 + a_3$.

Din enunţ, se cunosc primii doi termeni ai progresiei aritmetice:

$a_1 = 6$

$a_2 = a_1 + r = 12$

de unde se poate determina raţia progresiei aritmetice:

$r = 12 - a_1 = 12 - 6 = 6$

Soluţia 1

Cu aceste informaţii, se poate determina cel de-al treilea termen, necesar pentru calculul sumei cerute:

$a_3 = a_2 + r = 12 + 6 = 18$

$S = a_1 + a_2 + a_3 = 6 + 12 + 18 = 36$

Soluţia 2

Se poate folosi formula pentru sumă: $S_n = a_1 \cdot n + r \cdot \frac{n\cdot(n-1)}{2}$

Înlocuind valorile din enunţul problemei, obţinem:

$$S_3 = a_1 \cdot 3 + r \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} = a_1 \cdot 3 + 3 \cdot r = 3 \cdot 6 + 3 \cdot 6 = 18 + 18 = 36$$

2. Pentru o funcţie de gradul al doilea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, coordonatele vârfului parabolei sunt date de: $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

În cazul de faţă, $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$.

Discriminantul ecuaţiei de gradul al doilea asociate este:

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 4 - 16 = -12$.

Prin urmare, coordonatele vârfului se obţin prin înlocuire:

$V\left(-\frac{2}{2\cdot 1}, -\frac{-12}{4\cdot 1}\right) = V(-1,3)$.

3.

Soluţia 1

Dezvoltăm parantezele:

$(3^x - 1)(3^x - 3) = 0$

$3^{2x} - 3 \cdot 3^x - 3^x + 3 = 0$

$3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

Notăm $3^x = y$, cu condiţia ca $y > 0$.

Ecuaţia devine: $y^2 - 4y + 3 = 0$.

Soluţiile ecuaţiei de gradul al doilea astfel obţinute sunt:

$y_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} = \frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{4}}{2} = \frac{4\pm 2}{2}$

de unde: $y_1 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$ şi $y_2 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Ambele soluţii satisfac condiţia iniţială ca $y > 0$.

Revenind la ecuaţia iniţială:
$3^{x_1} = 1$, adică $3^{x_1} = 3^0$, de unde $x_1 = 0$.
$3^{x_2} = 3$, adică $3^{x_2} = 3^1$, de unde $x_2 = 1$.
Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este S = $\{0, 1\}$.

Soluţia 2
Se pot egala cu 0 cei doi factori ai produsului: $(3^x - 1)(3^x - 3) = 0$, de unde
$3^x - 1 = 0$ şi $3^x - 3 = 0$,
adică
$3^x = 1$ şi $3^x = 3$, obţinându-se aceeaşi mulţime a soluţiilor.

4. Numerele din **N** având 2 cifre sunt cuprinse între 10 şi 99, în total 90 de numere.
Dintre acestea, conţin cifra 1 18 numere: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81 şi 91.
Astfel, probabilitatea cerută este $P = \frac{18}{90} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$.

5. Triunghiul echilateral ABC poate fi reprezentat vectorial ca în Figura 1

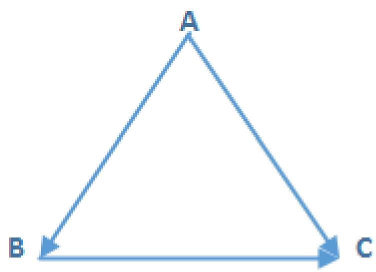

Figura 1

Astfel, se observă că vectorul $\overrightarrow{AC}$ "închide" conturul format din vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$, prin urmare poate fi aplicată regula triunghiului, adică:
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
Cum triunghiul ABC este echilateral avem că $AB \equiv BC \equiv AC$, de unde $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = 4$.

6. Fie triunghiul dreptunghic şi isoscel reprezentat în Figura 2.

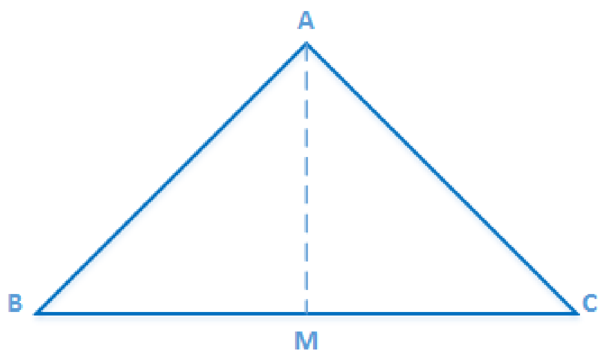

Figura 2

Soluţia 1

Într-un triunghi dreptunghic, aria este egală cu semiprodusul catetelor, în cazul de faţă $A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$.

Cum triunghiul este şi isoscel, avem că $AB \equiv AC = 4$.

Înlocuind, obţinem:

$A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = \frac{16}{2} = 8.$

Soluţia 2

Într-un triunghi oarecare, aria este egală cu semiprodusul dintre înălţime şi latura corespunzătoare, în cazul de faţă $A_{\Delta ABC} = \frac{AM \cdot BC}{2}$, cu $AM \perp BC$.

Întrucât triunghiul *ABC* este isoscel cu $AB \equiv AC$, *AM* este deopotrivă mediană, mediatoare şi bisectoare.

Unghiurile $\widehat{ABC}$ şi $\widehat{ACB}$ sunt egale şi au valoarea $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = \frac{\pi - m(\widehat{BAC})}{2} = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ (s-a ţinut cont de faptul că suma unghiurilor unui triunghi este 180°).

Aceasta înseamnă că triunghiurile *AMB* şi *AMC* sunt triunghiuri isoscele în care *AM* = *MB* (1), respectiv *AM* = *MC* (2).

Ţinând cont de faptul că triunghiul *ABC* este isoscel, rezultă că $AB \equiv AC = 4$.

Dar triunghiul ABC este şi dreptunghic, astfel încât în el se poate aplica deopotrivă şi teorema lui Pitagora:

$AB^2 + AC^2 = BC^2$

de unde

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Întrucât *AM* este deopotrivă înălţime, mediană, mediatoare şi bisectoare, obţinem că:

$$BM = MC = \frac{BC}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Din relaţiile (1) sau (2) rezultă că şi $AM = 2\sqrt{2}$.

Aplicând formula ariei, obţinem că:

$A_{\Delta ABC} = \frac{AM \cdot BC}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = \frac{16}{2} = 8.$

SUBIECTUL al II-lea

1. a) Se înlocuieşte *a* = 0 în expresia matricei şi se calculează determinantul:

$$det(A(0)) = det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (4 - 0) = 2 \cdot 4 = 8$$

b) Se calculează determinantul matricei:

$$det(A(a)) = det\begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & 2 \\ a & a & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & 2 \\ a & a & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ a & 2 \end{vmatrix} - a \cdot \begin{vmatrix} a & 2 \\ a & 2 \end{vmatrix} + a \cdot \begin{vmatrix} a & 2 \\ a & a \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (4 - 2a) - a \cdot (2a - 2a) + a \cdot (a^2 - 2a)$$

$$= 8 - 4a + a^3 - 2a^2$$

Se egalează det(A(*a*)) = 0 şi se obţine ecuaţia:

$a^3 - 2a^2 - 4a + 8 = 0$

care poate fi prelucrată mai departe:

$a^2(a-2)-4(a-2)=0$
$(a-2)(a^2-4)=0$
$(a-2)(a-2)(a+2)=0$
$(a-2)^2(a+2)=0$
Rezultă că valorile lui a pentru care determinantul este egal cu 0 sunt -2 şi 2.

c) Se înlocuieşte $a = 1$ în expresia matricei pentru a se obţine A(1).

$$A(1)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&2\\1&1&2\end{pmatrix}$$

şi se calculează produsul A(1) · X.

$$A(1)X=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&2\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y+z\\x+2y+2z\\x+y+2z\end{pmatrix}$$

Din egalitatea:

$$A(1)X=\begin{pmatrix}2x+y+z\\x+2y+2z\\x+y+2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\4\end{pmatrix}$$

se obţine sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases}2x+y+z=4\\x+2y+2z=5\\x+y+2z=4\end{cases}$$

Determinantul sistemului de ecuaţii este:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&2\\1&1&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&2\\1&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=2(4-2)-(2-2)+(1-2)=2\cdot 2-0-1=3$$

Întrucât $\Delta\neq 0$, sistemul este compatibil şi determinat, procedându-se la calcularea determinanţilor pentru fiecare dintre necunoscute:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}4&1&1\\5&2&2\\4&1&2\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}2&2\\1&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}5&2\\4&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5&2\\4&1\end{vmatrix}=4(4-2)-(10-8)+(5-8)$$
$$=4\cdot 2-2-3=3$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}2&4&1\\1&5&2\\1&4&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}5&2\\4&2\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&5\\1&4\end{vmatrix}=2(10-8)-4(2-2)+(4-5)$$
$$=2\cdot 2-0-1=3$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}2&1&4\\1&2&5\\1&1&4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&5\\1&4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&5\\1&4\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=2(8-5)-(4-5)+4(1-2)$$
$$=2\cdot 3+1+4\cdot(-1)=6+1-4=3$$

Necunoscutele vor avea valorile: $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{3}{3}=1$, $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{3}{3}=1$ şi $z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{3}{3}=1$.

Prin urmare, mulţimea soluţiilor ecuaţiei este S = {(1, 1, 1)}, iar matricea cerută este $X=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

2. a) $f(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + m = 1 - 2\cdot 1 + 3 + m = 1 - 2 + 3 + m = m + 2$

b-c) Scriind relaţiile lui Viète obţinem că:

(1) $x_1 + x_2 + x_3 = 2$

(2) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 3$

(3) $x_1x_2x_3 = -m$

b) Ridicând la pătrat relaţia (1) obţinem că:

$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 4$

adică:

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 = 4$

de unde:

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)$

Înlocuim rezultatul din relaţia (2) şi obţinem:

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$

c) Ridicând la cub relaţia (1) obţinem că:

$(x_1 + x_2 + x_3)^3 = 8$

adică

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1^2(x_2 + x_3) + 3x_2^2(x_1 + x_3) + 3x_3^2(x_1 + x_2) + 6x_1x_2x_3 = 8$

Din relaţia (1) avem că:

$x_2 + x_3 = 2 - x_1$

$x_1 + x_3 = 2 - x_2$

$x_1 + x_2 = 2 - x_3$

Înlocuind aceste relaţii în expresia de mai sus, ţinând cont şi de faptul că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 8$ precum şi de relaţia (3) obţinem că:

$8 + 3x_1^2(2 - x_1) + 3x_2^2(2 - x_2) + 3x_3^2(2 - x_3) + 6(-m) = 8$

$6x_1^2 - 3x_1^3 + 6x_2^2 - 3x_2^3 + 6x_3^2 - 3x_3^3 - 6m = 0$

$6(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 3(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = 6m$

Înlocuind valorile obţinute precedent:

$6(-2) - 3 \cdot 8 = 6m$

$-12 - 24 = 6m$

$-36 = 6m$

de unde se obţine că $m = -6$.

SUBIECTUL al III-lea

1. a) Se aplică formula de derivare pentru funcţiile de forma $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ pentru care derivata este: $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

În cazul de faţă $u(x) = \ln x$, $v(x) = x$ şi $u'(x) = \frac{1}{x}$ şi $v'(x) = 1$.

Aplicând formula, obţinem: $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

b) Pentru a determina ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei, trebuie calculată limita $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Având în vedere că $u(x) = \ln x$ şi $v(x) = x$ sunt continue şi derivabile pe intervalul $(0, +\infty)$ şi că $\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} v(x) = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$, se poate aplica regula lui l'Hospital.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Aşadar, asimptota spre $+\infty$ la graficul funcţiei la graficul funcţiei este orizontală şi are ecuaţia $y = 0$.

c) Pentru a demonstra inegalitatea cerută trebuie să studiem monotonia funcţiei, determinând eventualele puncte de extrem.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{ln(x)}{x} = -\infty$$

Punctele de extrem se determină pentru acele valori în care se anulează derivata de ordinul I:

$f'(x) = 0$

$\frac{1-lnx}{x^2} = 0$

$1 - \ln x = 0$

$\ln x = 1$

$x = e$

$f(e) = \frac{lne}{e} = \frac{1}{e}$

Întrucât $x^2 > 0$ pentru orice x din intervalul $(0, +\infty)$, semnul $f'(x)$ este dat de semnul expresiei $1 - \ln x$.

$1 - \ln x \geq 0$

$\ln x \leq 1$

$x \leq e$

Prin urmare, derivata de ordinul 1 $f'(x)$ este pozitivă pentru x în intervalul $(0, e]$ şi negativă pentru x în intervalul $(e, +\infty)$.

Se poate trasa tabelul prin care se studiază monotonia funcţiei:

x	0			e			$+\infty$
$f'(x)$		-	-	0	+	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	↗	$\frac{1}{e}$	↘	↘	0

Se observă că punctul $\left(e, \frac{1}{e}\right)$ este un punct de maxim al funcţiei $f(x)$, aşadar se poate spune că $f(x) \leq \frac{1}{e}$ pentru $\forall x \in (0, +\infty)$.

2. a) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2 + x + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{2+3+6}{6} = \frac{11}{6}$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

b) Explicităm inegalitatea:

$I_{n+1} \leq I_n$

$I_{n+1} - I_n \leq 0$

$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{f(x)}dx - \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}dx \leq 0$

$\int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{f(x)}dx \leq 0$

$\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^2+\_x+1}dx \leq 0$

În intervalul [0, 1], $x^n \geq 0$, $x^2 + x + 1 \geq 0$, iar $x - 1 \leq 0$, pentru orice x, prin urmare inegalitatea de mai sus se verifică.

c) Calculăm integrala dată:

$$\int_0^a \frac{2x+1}{f(x)}dx = \int_0^a \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \int_0^a \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx$$

Este cunoscut faptul că $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = lnu(x) + C.$

Prin urmare, integrala devine:

$$\int_0^a \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx = ln(x^2+x+1)\Big|_0^a = ln(a^2+a+1) - ln1 = ln(a^2+a+1)$$

Revenind la egalitatea iniţială, avem:

$\ln (a^2 + a + 1) = \ln 3$

$a^2 + a + 1 = 3$

$a^2 + a - 2 = 0$

Rezolvăm ecuaţia de gradul al doilea:

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

de unde

$a_1 = -2$, $a_2 = 1$.

Întrucât se cere o valoare pozitivă, aceasta este $a = 1$.