REZOLVAREA SUBIECTELOR PROPUSE LA PROBA DE ALGEBRĂ ŞI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ – VARIANTA A – LA EXAMENUL DE ADMITERE ÎN UNIVERSITATEA POLITEHNICA BUCUREŞTI 2015

1. Pentru $n \in \boldsymbol{N}^*$, notăm $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$. Câte numere naturale nenule n satisfac inegalitatea $n! \leq 120$?

a) 8; b) 4; c) 3; d) 7; e) 6; f) 5.

Este cunoscut faptul că:

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Așadar, n maxim pentru care este satisfăcută inegalitatea $n! \leq 120$ este $n = 5$.

Prin urmare, există 5 numere naturale nenule pentru care este satisfăcută inegalitatea $n! \leq 120$.

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{f}}$

2. Soluția ecuației $5x - 12 = 3x$ este:

a) 4; b) 5; c) –5; d) 6; e) 3; f) –3.

Ecuația $5x - 12 = 3x$ se mai scrie $5x - 3x = 12$ adică $2x = 12$, de unde $x = 6$.

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{d}}$

3. Suma soluțiilor ecuației $x^2 - 4x + 3 = 0$ este:

a) –3; b) 4; c) –2; d) 5; e) 7; f) –2.

Conform relațiilor lui Viete, o ecuație de gradul al doilea de forma $ax^2 + bx + c = 0$ se mai poate scrie $x^2 - Sx + P = 0$, unde:

$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Prin urmare, se obține că $S = 4$ și $P = 3$.

Altfel, se poate rezolva ecuația de gradul al doilea:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{4 \pm 2}{2}$

Se obțin cele două soluții:

$x_1 = \dfrac{4-2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

$x_2 = \dfrac{4+2}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

De aici, se determină suma și produsul soluțiilor:

$S = x_1 + x_2 = 1 + 3 = 4$

$P = x_1 x_2 = 1 \cdot 3 = 3$

Răspuns corect: $\boxed{\mathbf{b}}$

4. Modulul numărului complex $4 + 3i$ este:

a) 3; b) 5; c) 4; d) $\sqrt{7}$; e) 1; f) 2.

Modulul unui număr complex $z = a + bi$ este $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

În cazul de față, se obține că modulul numărului complex este:

$|4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

Răspuns corect: $\boxed{\mathbf{b}}$

5. Soluția ecuației $3^{x-1} = 9$ este:

a) 3; b) 4; c) 5; d) 0; e) 2; f) 1.

Întrucât funcția exponențială este bijectivă, o egalitate de forma $a^{u(x)} = a^{v(x)}$ cu a constant se mai poate scrie $u(x) = v(x)$.

Ecuația $3^{x-1} = 9$ se poate scrie $3^{x-1} = 3^2$, de unde

$x - 1 = 2$

și încă

$x = 3$

Răspuns corect: $\boxed{\mathbf{a}}$

6. Soluția ecuației $\sqrt{3x+4} = 2$ este:

a) $x = 3$; b) $x = 1$; c) $x = 0$; d) $x = 2$; e) $x = 4$; f) $x = -1$.

Se pune condiția de existență a radicalului:

$3x + 4 \geq 0$

$3x \geq -4$

$x \geq -\frac{4}{3}$

$x \in \left[-\frac{4}{3}, +\infty\right)$

Se ridică la pătrat ambii membrii ai ecuației:

$\sqrt{3x+4} = 2 |(\quad)^2$

$3x + 4 = 4$

$3x = 0$

$x = 0 \in \left[-\frac{4}{3}, +\infty\right)$

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{c}}$

7. Mulțimea soluțiilor ecuației $x^3 - 9x = 0$ este:

a) {–4, 1}; b) {–2, 0, 2}; c) {4, 1}; d) {–3, 0, 3}; e) {–3, 3}; f) {–1, 0, 1}.

Ecuația $x^3 - 9x = 0$ se mai poate scrie:

$x(x^2 - 9) = 0$

de unde:

$x_1 = 0$

$x^2 - 9 = 0$

$$x_{2.3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} = \pm\frac{\sqrt{36}}{2} = \pm\frac{6}{2} = \pm 3$$

$x_2 = -3$

$x_3 = 3$

Prin urmare, mulțimea soluțiilor ecuației $x^3 - 9x = 0$ este S = {–3, 0, 3}.

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{d}}$

8. Să se rezolve ecuația $\log_3 x = 1$ este:

a) $x = 9$; b) $x = 17$; c) $x = 3$; d) $x = 14$; e) $x = 11$; f) $x = 13$.

O ecuație de forma $\log_a x = b$ are soluția $x = a^b$.

În cazul de față, $x = 3^1 = 3$.

Răspuns corect: $\boxed{c}$

9. Ordonați crescător numerele π, 3, $\sqrt{5}$.

a) π, 3, $\sqrt{5}$; b) 3, π, $\sqrt{5}$; c) $\sqrt{5}$, 3, π; d) $\sqrt{5}$, π, 3; e) π, $\sqrt{5}$, 3; f) 3, $\sqrt{5}$, π.

Este cunoscut faptul că π = 3,14…, prin urmare $\pi \geq 3$.

De asemenea, se poate scrie că:

$\sqrt{5} \leq \sqrt{9}$

$\sqrt{5} \leq 3$

Ca atare, există inegalitatea $\sqrt{5} \leq 3 \leq \pi$.

Răspuns corect: $\boxed{c}$

10. Fie $f : \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^2 + e^x$. Să se calculeze $f'(1)$.

a) $2 + e$; b) $1 + e$; c) $3 + e$; d) e; e) $e - 1$; f) $2e$.

Se calculează derivata de ordinul întâi:

$f'(x) = (x^2)' + (e^x)' = 2x + e^x$.

În punctul $x = 1$ avem:

$f'(1) = 2 \cdot 1 + e^1 = 2 + e$.

Răspuns corect: $\boxed{a}$

11. Fie polinomul $f = (2X^2 - 1)^2$. Să se calculeze $f(1)$.

a) 3; b) 1; c) –1; d) 0; e) 2; f) –2.

Se înlocuiește $X = 1$ în expresia polinomului și avem: $f(1) = (2 \cdot 1^2 - 1)^2 = (2 \cdot 1 - 1)^2 = (2 - 1)^2 = 1^2 = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{b}$

12. Al 5-lea termen al progresiei aritmetice 1, 4, 7, … este:

a) 13; b) 15; c) 10; d) 12; e) 11; f) 16.

Progresia aritmetică are termenii $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$.

Ca atare, rația progresiei aritmetice este $r = 3$.

Al n-lea termen al progresiei aritmetice se calculează după formula $a_n = a_1 + (n - 1)r$.

Pentru $n = 5$ se obține $a_5 = 1 + (5 - 1) \cdot 3 = 1 + 4 \cdot 3 = 1 + 12 = 13$.

Răspuns corect: $\boxed{\mathbf{a}}$

13. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$.

a) $x = 2, y = 3$; b) $x = 3, y = 5$; c) $x = -1, y = 4$; d) $x = 4, y = -1$; e) $x = 4, y = 2$; f) $x = 1, y = \frac{1}{5}$.

Se folosește metoda reducerii, adunându-se cei doi membrii ai ecuației și se obține:

$3x = 3$

de unde $x = 1$.

Se înlocuiește valoarea lui x în prima ecuație și avem:

$2 \cdot 1 + 5y = 3$

$2 + 5y = 3$

$5y = 1$

$y = \frac{1}{5}$

Prin urmare, soluția sistemului de ecuații este $x = 1, y = \frac{1}{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\mathbf{f}}$

14. Să se calculeze determinantul $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

a) $D = 11$; b) $D = 0$; c) $D = 15$; d) $D = -5$; e) $D = 7$; f) $D = -4$.

$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(7 \cdot 1 - 0 \cdot 3) - 3(0 \cdot 1 - 0 \cdot 2) + (0 \cdot 3 - 7 \cdot 2) = 2(7 - 0) - 3(0 - 0) + (0 - 14) = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 0 - 14 = 14 - 0 - 14 = 0$

Răspuns corect: $\boxed{\mathbf{b}}$

15. Dacă $x \leq 3 - 2x$, atunci:

a) $x \leq 1$; b) $x \geq 0$; c) $x \leq -5$; d) $x \leq 0$; e) $x \geq 15$; f) $x \leq -11$.

Inecuația $x \leq 3 - 2x$ se rescrie, aducând de aceeași parte a inegalității termenii dependenți de *x*, respective termenii liberi:

$x + 2x \leq 3$

$3x \leq 3 | :3$

$x \leq 1$

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{a}}$

16. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^2.

a) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 & 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 4 & -2 - 2 \\ 2 + 2 & -4 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{e}}$

17. Să se calculeze punctul de extrem al funcției $f: (0, \infty) \rightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = x - \ln x$.

a) $x = \frac{1}{4}$; b) x = 3; c) x = 1; d) x = 4; e) $x = \frac{1}{2}$; f) x = 2.

Punctele de extrem local ale unei funcții sunt acele valori pentru care se anulează derivata de ordinul întâi.

Se determină derivata de ordin întâi a funcției *f*.

$$f'(x) = x' - (\ln x)' = 1 - \frac{1}{x}$$

Se rezolvă ecuația: $f'(x) = 0$.

$$1 - \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{1}{x} = 1$$

$x = 1 \in (0, \infty)$

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{c}}$

18. Să se calculeze $\int_0^1 (x + e^x)dx$.

a) $e - \frac{1}{2}$; b) $3e$; c) $e + \frac{1}{2}$; d) $2e$; e) $2 + 3e$; f) $\frac{1}{2}$.

$$\int_0^1 (x + e^x)dx = \left(\frac{x^2}{2} + e^x\right)\Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} + e^1 - \frac{0}{2} - e^0 = \frac{1}{2} + e - 1 = e - \frac{1}{2}$$

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{a}}$

Varianta / Întrebare	a	b	c	d	e	f
1						■
2				■		
3		■				
4		■				
5	■					
6			■			
7				■		
8			■			
9			■			
10	■					
11		■				
12	■					
13						■
14		■				
15	■					
16					■	
17			■			
18	■					