REZOLVAREA SUBIECTELOR PROPUSE
LA PROBA DE ALGEBRĂ ŞI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ
LA EXAMENUL DE ADMITERE
ÎN UNIVERSITATEA POLITEHNICA BUCUREŞTI
2014

1. Să se calculeze integrala $I = \int_0^1 (x^3 + 2x)dx$.

a) $I = \frac{3}{2}$; b) $I = \frac{5}{2}$; c) $I = \frac{7}{2}$; d) $I = \frac{1}{2}$; e) $I = \frac{1}{4}$; f) $I = \frac{5}{4}$.

Rezolvare.

$$I = \int_0^1 (x^3 + 2x)dx = \left(\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{x^4}{4} + x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\mathbf{f}}$.

2. Fie polinomul $P = 2X^3 + 4X^2 - 5X + a$. Să se determine a astfel încât polinomul P să fie divizibil cu $X - 1$.

a) $a = -2$; b) $a = 3$; c) $a = 0$; d) $a = -1$; e) $a = 2$; f) $a = -3$.

Rezolvare.

Pentru ca polinomul $P(X)$ să fie divizibil cu $X - 1$ trebuie ca P(1) să fie egal cu 0.

Din această condiţie se obţine ecuaţia:

$2 + 4 - 5 + a = 0$

adică

$a + 1 = 0$

de unde

$a = -1$.

Răspuns corect: $\boxed{\mathbf{d}}$.

3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Atunci A^2 este:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 31 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 18 & 4 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$.

Rezolvare.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot5 \\ 3\cdot1+5\cdot3 & 3\cdot2+5\cdot5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+10 \\ 3+15 & 6+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\mathbf{d}}$.

4. Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei este:

a) $\left\{1, \frac{-1\pm\sqrt[3]{3}}{2}\right\}$; b) $\left\{1, \frac{-1\pm\sqrt[3]{5}}{2}\right\}$; c) $\left\{1, \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right\}$; d) $\left\{1, \frac{-2\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$; e) $\left\{1, \frac{-2\pm\sqrt{7}}{2}\right\}$; f) $\left\{1, \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Rezolvare.

Se ridică ambii membri ai ecuaţiei la puterea a treia. Nu se impune nici o regulă de existenţă a radicalului, fiind vorba de un radical de ordin impar.

$$2\sqrt[3]{2x-1} = x^3 + 1 \,|(\quad)^3$$

$$8(2x - 1) = (x^3 + 1)^3$$

$$16x - 8 = x^9 + 3x^6 + 3x^3 + 1$$

$$x^9 + 3x^6 + 3x^3 - 16x + 9 = 0.$$

Se observă că $x = 1$ este soluţie a ecuaţiei (de altfel, această soluţie este sugerată şi de toate variantele de răspuns).

$$\begin{array}{l|l}
x^9 \quad + 3x^6 \quad + 3x^3 \quad - 16x + 9 & x - 1 \\
\hline
-x^9 + x^8 & x^8 + x^7 + x^6 + 4x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 7x - 9 \\
\quad x^8 & \\
\quad -x^8 + x^7 & \\
\quad\quad x^7 + 3x^6 & \\
\quad\quad -x^7 + x^6 & \\
\quad\quad\quad 4x^6 & \\
\quad\quad\quad -4x^6 + 4x^5 & \\
\quad\quad\quad\quad 4x^5 & \\
\quad\quad\quad\quad -4x^5 + 4x^4 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad 4x^4 + 3x^3 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad -4x^4 + 4x^3 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 7x^3 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad -7x^3 + 7x^2 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 7x^2 - 16x & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad -7x^2 + 7x & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad -9x \;\; + 9 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 9x \;\; - 9 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 &
\end{array}$$

Ecuaţia devine:

$x^8 + x^7 + x^6 + 4x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 7x - 9 = 0$

Ecuaţia se poate rescrie astfel:

$x^8 + x^7 + x^6 + 4x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 7x + 7 - 16 = 0$

$x^6(x^2 + x + 1) + 4x^3(x^2 + x + 1) + 7(x^2 + x + 1) = 16$

$(x^2 + x + 1)(x^6 + 4x^3 + 7) = 16$

Se observă că 16 este un produs de doi factori, aceştia putând fi, succesiv 1 şi 16, 2 şi 8, 4 şi 4, 8 şi 2, 16 şi 1. Egalăm cei doi factori cu aceste valori, valoarea obţinută a lui x trebuind să satisfacă ambele relaţii.

<u>Cazul 1</u>

$x^2 + x + 1 = 1$ (1) şi $x^6 + 4x^3 + 7 = 16$ (2)

Din relaţia (1) se obţin valorile $x_1 = -1$ şi $x_2 = 0$ care nu satisfac însă şi relaţia (2).

<u>Cazul 2</u>

$x^2 + x + 1 = 2$ şi $x^6 + 4x^3 + 7 = 8$,

$x^2 + x - 1 = 0$ (1) şi $x^6 + 4x^3 - 1 = 0$ (2)

Rezolvăm ecuaţia (1): $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

Rezolvăm ecuaţia (2), notând $y = x^3$. Ecuaţia devine $y^2 + 4y - 1 = 0$, având soluţiile: $y_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{16+4}}{2} = \frac{-4\pm\sqrt{20}}{2} = \frac{-4\pm2\sqrt{5}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$

Revenind la substituţia iniţială, obţinem că: $x_{1,2}^3 = -2 \pm \sqrt{5}$.

Verificăm dacă soluţiile ecuaţiei (1) verifică relaţia pentru soluţiile ecuaţiei (2):

$$x_{1,2}^3 = \left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{-1\pm3\sqrt{5}-15\pm5\sqrt{5}}{8} = \frac{-16\pm8\sqrt{5}}{8} = -2 \pm \sqrt{5}$$

Prin urmare, soluţiile $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ verifică ambele relaţii, prin urmare sunt soluţii ale ecuaţiei iniţiale.

<u>Cazul 3</u>

$x^2 + x + 1 = 4$ şi $x^6 + 4x^3 + 7 = 4$,

$x^2 + x - 3 = 0$ (1) şi $x^6 + 4x^3 + 3 = 0$ (2)

Rezolvăm ecuaţia (1): $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+12}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

Rezolvăm ecuaţia (2), notând $y = x^3$. Ecuaţia devine $y^2 + 4y + 3 = 0$, având soluţiile: $y_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4\pm\sqrt{4}}{2} = \frac{-4\pm2}{2}$, de unde $y_1 = -3$ şi $y_2 = -1$.

Se observă că soluţiile ecuaţiei (1) nu verifică relaţia pentru soluţiile ecuaţiei (2).

<u>Cazul 4</u>

$x^2 + x + 1 = 8$ şi $x^6 + 4x^3 + 7 = 2$,

$x^2 + x - 7 = 0$ (1) şi $x^6 + 4x^3 + 5 = 0$ (2)

Rezolvăm ecuaţia (1): $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+28}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$.

Rezolvăm ecuaţia (2), notând $y = x^3$. Ecuaţia devine $y^2 + 4y + 5 = 0$, care nu are însă soluţii reale întrucât discriminantul este negativ ($\Delta = -4$).

<u>Cazul 5</u>

$x^2 + x + 1 = 16$ şi $x^6 + 4x^3 + 7 = 1$,

$x^2 + x - 15 = 0$ (1) şi $x^6 + 4x^3 + 6 = 0$ (2)

Rezolvăm ecuaţia (1): $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+60}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{61}}{2}$.

Rezolvăm ecuaţia (2), notând $y = x^3$. Ecuaţia devine $y^2 + 4y + 6 = 0$, care nu are însă soluţii reale întrucât discriminantul este negativ ($\Delta = -8$).

Prin urmare, mulţimea soluţiilor ecuaţiei iniţiale este $\left\{1, \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{f}}$.

5. Fie f un polinom de gradul 2014 cu rădăcinile –1, –2, –3, …, –2014. Pentru $x \in (-2, \infty)$, se consideră ecuaţia $\int_{x+1}^{x+2} \frac{f'(t)}{f(t)} dt = ln(x + 2016) - x^2$. Dacă n e numărul soluţiilor negative şi m e numărul soluţiilor pozitive ale ecuaţiei date, atunci:

a) $n = 0$, $m = 1$; b) $n + m = 3$; c) $n = 0$, $m = 2$; d) $2n + m = 4$; e) $n = 1$, $m = 1$; f) $n = 1$, $m = 0$.

Rezolvare.

Dacă f este un polinom de gradul 2014 cu rădăcinile –1, –2, –3, …, –2014, atunci acesta are forma:

$f[x] = (x + 1)(x + 2)(x + 3) \dots (x + 2014)$.

De asemenea, se rezolvă integrala care apare în expresia ecuaţiei: $\int_{x+1}^{x+2} \frac{f'(t)}{f(t)} dt = lnf(t)\Big|_{x+1}^{x+2} = lnf(x+2) - lnf(x+1) = ln\frac{f(x+2)}{f(x+1)}$.

Ţinând cont de forma polinomului f şi înlocuind corespunzător variabila, obţinem:

$$ln\frac{f(x+2)}{f(x+1)} = ln\frac{(x+3)(x+4)(x+5)\ldots(x+2016)}{(x+2)(x+3)(x+4)\ldots(x+2015)} = ln\frac{x+2016}{x+2} = ln(x+2016) - ln(x+2).$$

Revenind în ecuaţia iniţială, obţinem:

$\ln(x + 2016) - \ln(x + 2) = \ln(x + 2016) - x^2$,

adică $\ln(x + 2) = x^2$.

Studiem funcţiile $u(x) = \ln(x + 2)$ şi $v(x) = x^2$ pe intervalul $(-2, \infty)$ pentru a determina punctele de intersecţie ale graficelor lor, acestea fiind soluţiile ecuaţiei.

Pentru $u(x)$:

$$\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} u(x) = \lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} ln(x+2) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = \lim_{x\to\infty} ln(x+2) = +\infty$$

$u(x) = 0 \leftrightarrow \ln(x + 2) = 0 \leftrightarrow x + 2 = 1 \leftrightarrow x = -1$

$u'(x) = \frac{1}{x+2}$ şi $u'(x) > 0$ pe intervalul considerat

$u''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$ şi $u''(x) < 0$ pe intervalul considerat

Pentru $v(x)$:

$$\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} v(x) = \lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} x^2 = 4$$

$$\lim_{x\to\infty} v(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty$$

$v(x) = 0 \leftrightarrow x^2 = 0 \leftrightarrow x = 0$

$v'(x) = 2x$ şi $v'(x) < 0$ pentru $x \in (-2, 0)$ şi $v'(x) > 0$ pentru $x \in (0, +\infty)$.

$v''(x) = 2$ şi $v''(x) > 0$ pe intervalul considerat

Graficul de variaţie al celor două funcţii este:

x	-2 -1 0 $+\infty$
$u'(x)$	+ + + + + + + + + + + + + +
$u(x)$	$-\infty$ ↘ 0 ↗ $+\infty$
$u''(x)$	– – – – – – – – – – – – – – concav
$v'(x)$	– – 0 + + + + + + + + + + +
$v(x)$	4 ↘ 0 ↗ $+\infty$
$v''(x)$	+ + + + + + + + + + + + + + convex

Se reprezintă grafic cele două funcţii:

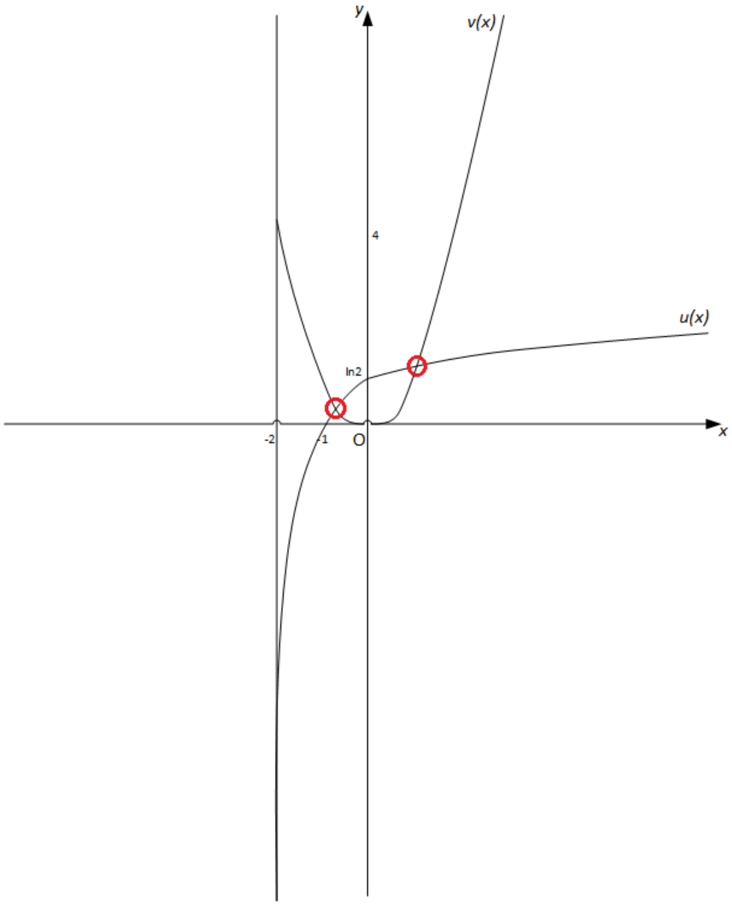

Figura 1

şi se observă că există două puncte de intersecţie al celor două funcţii, unul pentru $x < 0$ şi unul pentru $x > 0$. Acestea vor fi şi soluţiile ecuaţiei iniţiale, redusă la forma $\ln(x + 2) - x^2 = 0$.

Prin urmare $m = 1$ şi $n = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{e}}$.

6. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \ln x$.

Dacă $M = \{\ x_0 \in (0, \infty)\ |$ dreapta tangentă la graficul lui f în punctul de abscisă x_0 trece prin $A(2,1)\ \}$ şi $S = \sum_{x_0 \in M} x_0$, atunci:

a) $S \in [1, \frac{3}{2})$; b) $S \in (2,3)$; c) $S \in (5,6)$; d) $S \in (3,4)$; e) $S \in (4,5)$; f) $S \in (\frac{3}{2}, 2)$.

Rezvolvare.

Ecuaţia tangentei la graficul unei funcţii f într-un punct de abscisă x_0 este

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Punând condiţia ca această dreaptă să treacă şi prin punctul A, având coordonatele $x = 2$ şi $y = 1$, obţinem:

$1 - f(x_0) = f'(x_0)(2 - x_0)$

Derivata de ordinul întâi a funcţiei f este $f'(x) = lnx + x \cdot \frac{1}{x} = lnx + 1$.

Ecuaţia iniţială devine:

$1 - x_0 \ln x_0 = (\ln x_0 + 1)(2 - x_0)$

$1 - x_0 \ln x_0 = 2\ln x_0 - x_0 \ln x_0 + 2 - x_0$

$x_0 - 1 = \ln x_0^2$

Studiem funcţiile $u(x) = x - 1$ şi $v(x) = \ln x^2$ pe intervalul $(-\infty, \infty)$ pentru a determina punctele de intersecţie ale graficelor lor, acestea fiind soluţiile ecuaţiei.

Pentru $u(x)$:

$$\lim_{x \to -\infty} u(x) = \lim_{x \to -\infty} (x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} u(x) = \lim_{x \to \infty} (x - 1) = +\infty$$

$u(x) = 0 \leftrightarrow x - 1 = 0 \leftrightarrow x = 1$

$u'(x) = 1$ şi $u'(x) > 0$ pe intervalul considerat

$u''(x) = 0$

Pentru $v(x)$:

$$\lim_{x \to -\infty} v(x) = \lim_{x \to -\infty} lnx^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} v(x) = \lim_{x \to \infty} lnx^2 = +\infty$$

$v(x) = 0 \leftrightarrow \ln x^2 = 0 \leftrightarrow x^2 = 1 \leftrightarrow x_{1,2} = \pm 1$

Se observă fapcul că punctul $x = 0$ reprezintă o nedeterminare pentru funcţia $v(x)$, motiv pentru care trebuie calculate limitele la stânga şi la dreapta în punctul respectiv:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} v(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} lnx^2 = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} v(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} lnx^2 = -\infty$$

Rezultă că dreapta $x = 0$ este o asimptotă verticală a funcţiei $v(x) = \ln x^2$.

$v'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$ şi $v'(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, 0)$ şi $v'(x) > 0$ pentru $x \in (0, +\infty)$.

$v''(x) = -\frac{2}{x^2}$ şi $v''(x) < 0$ pe întreg intervalul considerat.

Graficul de variaţie al celor două funcţii este:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$u'(x)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$u(x)$	$-\infty$	↗	↗	↗	↗	↗	0	↗	$+\infty$
$u''(x)$	0 (funcţie de gradul întâi)								
$v'(x)$	–	–	–	–	|	+	+	+	+
$v(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
$v''(x)$	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	concav								

Se reprezintă grafic cele două funcţii:

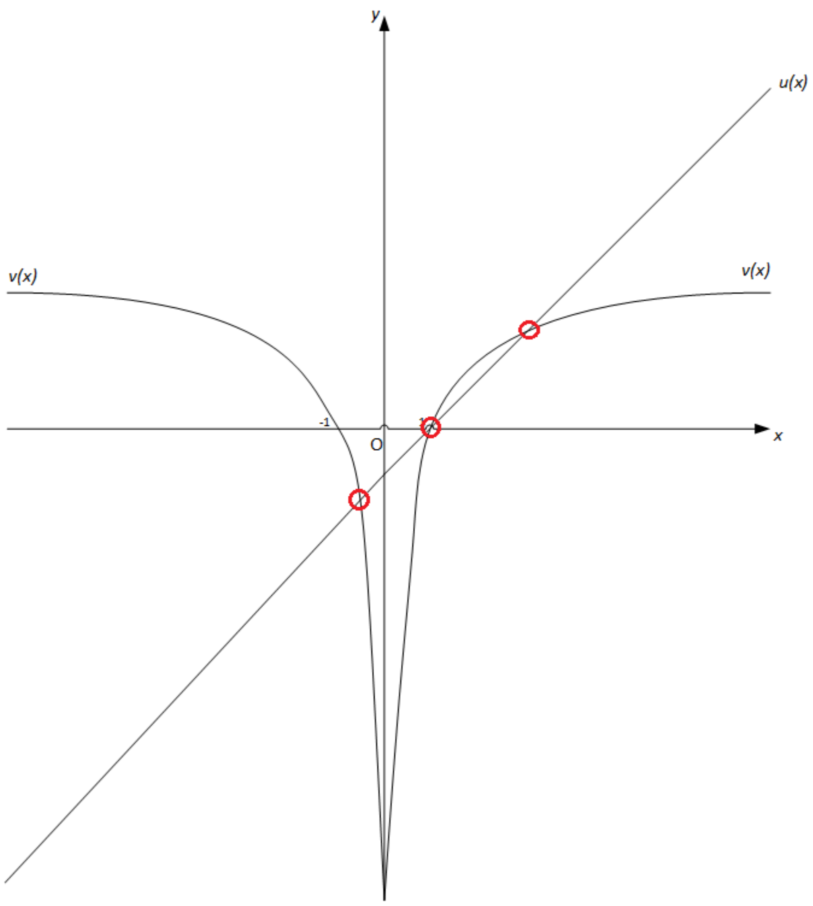

Figura 2

şi se observă că există trei puncte de intersecţie.

Totuşi, punctul x_0 căutat face parte din intervalul $(0, \infty)$ şi se observă faptul că există două puncte care satisfac această condiţie şi anume $x_0 = 1$ şi $x_0 \in (3,4)$ (întrucât $u(3) = 2$ şi $v(3) = \ln 9 \approx 2{,}19$ iar $u(4) = 3$ şi $v(4) = \ln 16 \approx 2{,}77$) de unde suma căutată $S \in (4,5)$.

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{e}}$.

7. Suma soluţiilor ecuaţiei $\begin{vmatrix} 2 & x^2 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = 0$ este:

a) $1 + \sqrt{2}$; b) 2014; c) –2; d) 0; e) 5; f) $\sqrt{2}$.

Rezolvare:

Se dezvoltă determinantul:

$$\begin{vmatrix} 2 & x^2 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

$-16 + x^2 = 0$

de unde

$x_{1,2} = \pm 4$

iar suma soluţiilor ecuaţiei este $S = x_1 + x_2 = -4 + 4 = 0$.

De asemenea, s-ar fi putut observa (din relaţiile lui Viète) faptul că $a = 1$, $b = 0$, $c = -16$ (presupunând că forma generală a ecuaţiei de gradul al doilea este $ax^2 + bx + c = 0$), iar suma soluţiilor ecuaţiei este $S = -\frac{b}{a} = -\frac{0}{1} = 0$.

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{d}}$.

8. Fie progresia aritmetică 1, 4, 7, 10, …. Să se calculeze al 2014-lea termen al progresiei.

a) 6041; b) 5012; c) 6040; d) 5420; e) 1258; f) 6039.

Rezolvare.

În enunţ poate fi identificată o progresie aritmetică cu termenul $a_1 = 1$ şi raţia $r = 3$. Formula pentru al n-lea termen al progresiei este $a_n = a_1 + (n - 1)r$.

Înlocuind, obţinem $a_{2014} = a_1 + (2014 - 1)r = a_1 + 2013r = 1 + 2013 \cdot 3 = 1 + 6039 = 6040$.

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{c}}$.

9. Să se calculeze termenul care nu-l conţine pe x din dezvoltarea $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$.

a) $2C_{10}^{8}$; b) C_{10}^{1}; c) C_{10}^{2}; d) C_{10}^{5}; e) C_{10}^{3}; f) 3.

Rezolvare

Pentru un binom de tipul $(a + b)^n$, formula pentru al k-lea termen al dezvoltării este

$$T_k = C_n^k a^{n-k} b^k$$

Se caută acel $k \in [0, 10]$ pentru care T_k este independent de x.

În cazul de faţă,

$T_k = C_{10}^k x^{10-k} \frac{1}{x}^k = C_{10}^k x^{10-k} x^{-k} = C_{10}^k x^{10-2k}$.

Independenţa lui T_k de x se obţine pentru $10 - 2k = 0$, adică $k = 5$.

Coeficientul lui T_5 este $C_{10}^5 = \frac{10!}{5!5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{30240}{120} = 252.$

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{d}}$.

10. Să se calculeze produsul P al soluţiilor ecuaţiei $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

a) $P = 2$; b) $P = -1$; c) $P = \frac{1}{2}$; d) $P = 3$; e) $P = 1$; f) $P = -\frac{1}{3}$.

Rezolvare.

Forma generală a unei ecuaţii de gradul al doilea este $ax^2 + bx + c = 0$. În cazul de faţă, $a = 3$, $b = -2$, $c = -1$.

Soluţia 1.

Conform relaţiilor lui Viète, suma soluţiilor ecuaţiei este $S = -\frac{b}{a}$, în timp ce produsul soluţiilor ecuaţiei este $P = \frac{c}{a}$.

Înlocuind, obţinem $S = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$ şi $P = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$.

Soluţia 2.

Rezolvăm ecuaţia de gradul al doilea cu formula: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Înlocuind, obţinem $x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6}$, de unde $x_1 = \frac{2-4}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$ şi $x_2 = \frac{2+4}{6} = \frac{6}{6} = 1$.

Suma soluţiilor ecuaţiei este $S = x_1 + x_2 = \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{2}{3}$.

Produsul soluţiilor ecuaţiei este $P = x_1 x_2 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 1 = -\frac{1}{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{f}}$.

11. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4x + 3$. Să se determine mulţimea $A = \{ x \in \mathbf{R} \mid f(x) > 1 \}$.

a) $A = \{ -2 \}$; b) $A = (-\infty, 0)$; c) $A = [-1, \infty)$; d) $A = \mathbf{R}$; e) $A = \emptyset$; f) $A = \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Rezolvare.

$f(x) > 1$

$4x + 3 > 1$

$4x > -2$

$x > -\frac{1}{2}$

$x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Prin urmare, $A = \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{f}}$.

12. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + e^x$. Atunci:

a) $f'(1) = e^2$; b) $f'(1) = 0$; c) $f'(1) = 2$; d) $f'(1) = e$; e) $f'(1) = 3e$; f) $f'(1) = 2 + e$.

Rezolvare.

Se cere să se calculeze $f'(1)$.

$f'(x) = 2x + e^x$

Înlocuind $x = 1$, obţinem:

$f'(1) = 2 + \mathrm{e}$.

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{f}}$.

13. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x - \mathrm{x}$. Abscisa punctului de extrem al funcţiei f este:

a) $x = \frac{1}{e}$; b) $x = e$; c) $x = \frac{1}{2}$; d) $x = \frac{1}{e^2}$; e) $x = 1$; f) $x = e^2$.

Rezolvare.

Un punct de extrem al unei funcţii este definit prin faptul că derivata de ordinul întâi se anulează.

$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$

$f'(x) = 0$

$\frac{1}{x} - 1 = 0$

$x = 1$.

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{e}}$.

14. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sqrt{3x+1} = x+1$ este:

a) { –1, 1}; b) { 1, 3}; c) $\{\sqrt{2}, 2\}$; d) { –1, 3}; e) { 0, 1 }; f) $\emptyset$.

Rezolvare.

Se pune condiţia de existenţă a radicalului $3x + 1 \geq 0$, adică $3x \geq -1$, de unde $x \in [-\frac{1}{3}, \infty)$.

Se ridică la pătrat ecuaţia iniţială:

$\sqrt{3x+1} = x+1 \mid (\quad)^2$

$3x + 1 = (x + 1)^2$

$3x + 1 = x^2 + 2x + 1$

$x^2 - x = 0$

de unde $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, ambele soluţii îndeplinind condiţia de existenţă a radicalului.

Prin urmare, mulţimea soluţiei ecuaţiei este { 0, 1 }.

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{e}}$.

15. Modulul numărului complex $z = \frac{1-i}{1+i}$ este:

a) 3; b) 1; c) $\sqrt{2}$; d) 2; e) $\sqrt{3}$; f) $\sqrt{5}$.

Rezolvare.

Modulul $|z|$ al unui număr complex $z = a + ib$ este $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Se aduce numărul complex la forma $z = a + ib$ prin înmulţirea atât a numărătorului cât şi a numitorului liniei de fracţie cu numărătorul:

$$z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{1-2i-1}{1+1} = \frac{-2i}{2} = -i$$

Modulul numărului complex z pus sub această formă se poate determina aplicând formula de mai sus:

$|z| = \sqrt{(-1)^2} = 1.$

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{b}}$.

16. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $3^{x^2+x+2} = 9$ este:

a) { 0, 4 }; b) { –1, 1 }; c) $\emptyset$; d) { –1, 0 }; e) { 1, 3}; f) { –2, 2}.

Rezolvare.

Întrucât funcţia exponenţială este bijectivă, o relaţie de tipul $a^x = a^y$, implică în mod automat $x = y$.

În cazul de faţă, ecuaţia se poate scrie:

$$3^{x^2+x+2} = 3^2$$

de unde:

$$x^2 + x + 2 = 2$$

$$x^2 + x = 0$$

obţinându-se: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$.

Prin urmare, mulţimea soluţiei ecuaţiei este $\{ -1, 0 \}$.

Răspuns corect: **d**.

17. Soluţia ecuaţiei $\log_2(x^2 + 1) - \log_2 x = 1$ este:

a) $x = 4$; b) $x = 0$; c) $x = 2$; d) $x = 1$; e) $x = \sqrt{2}$; f) $x = 3$.

Rezolvare.

Se pune condiţia de existenţă a logaritmului $x > 0$.

$$\log_2(x^2 + 1) - \log_2 x = 1$$

Se ţine cont de faptul că $log_a x - log_a y = log_a \frac{x}{y}$ precum şi de faptul că $log_a a = 1$.

$$log_2 \frac{x^2+1}{x} = log_2 2$$

Întrucât funcţia logaritmică este bijectivă, o relaţie de tipul $\log_a x = \log_a y$, implică în mod automat $x = y$.

Ecuaţia devine:

$$\frac{x^2+1}{x} = 2$$

adică

$$x^2 + 1 = 2x$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

şi soluţiile (confundate) ale ecuaţiei sunt $x_{1,2} = 1$.

Răspuns corect: **d**.

18. Fie $S = 2C_{2014}^{1} - C_{2014}^{2013}$. Atunci:

a) S = 2014; b) S = 2012; c) S = 2010; d) S = 1012; e) S = 2013; f) S = 2020.

Rezolvare.

Se aplică formula de calcul a combinărilor $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

În cazul de faţă:

$$S = 2C_{2014}^{1} - C_{2014}^{2013} = 2\frac{2014!}{1!2013!} - \frac{2014!}{2013!1!} = \frac{2 \cdot 2014! - 2014!}{2013!1!} = \frac{2014!}{2013!} = 2014.$$

Răspuns corect: $\boxed{\textbf{a}}$.

Întrebare \ Varianta	a	b	c	d	e	f
1						■
2				■		
3				■		
4						■
5					■	
6					■	
7				■		
8			■			
9				■		
10						■
11						■
12						■
13					■	
14					■	
15		■				
16				■		
17				■		
18	■					